

ラプラス演算子

山本昌志*

2005 年 1 月 10 日

1 はじめに

曲線座標系の勾配と発散、回転の演算については、「座標系と微分演算子」で述べたとおりである。ここでは、その結果を用いて、ラプラス演算子を求めてみる。

マックスウェルの方程式は、電場と磁場の 1 階の連立微分方程式である。それは、ベクトル場の発散と回転で記述されている。しかし、実際の問題を解く場合、電場と磁場の両方を計算するのは面倒である。そのため、電場と磁場を分離して、2 階の方程式に直して、どちらか一方を計算することが多い。その 2 階の方程式を記述するために、ラプラス演算子が現れる。

カーテシアン座標系の場合、ラプラス演算子は単純な形をしており、なにも問題はない。しかし、曲線座標系を使う場合は、少々複雑な形をしている。ここでは、この少々複雑な形のラプラス演算子を導くことにする。カーテシアン座標系と円柱座標系、極座標系について、演算子の形を求める。

ラプラス演算子は、その作用する対象に応じて、2 種類ある。一方は、スカラー量に作用するスカラーラプラス演算子で、スカラー量に作用して、スカラー量を作る。他方はベクトルラプラス演算子で、ベクトル量に作用し、ベクトルを作る。いずれも、2 階の微分演算子である。

2 勾配・発散・回転

ここで、計算するカーテシアン座標系と円柱座標系、極座標系の勾配と発散、回転を示しておく。

* 国立秋田工業高等専門学校 電気情報工学科

2.1 曲線座標の一般形

曲線座標形の微分演算子 (勾配、発散、回転) は、スケール因子 (h_1, h_2, h_3) を用いて、以下のように表すことができる。

$$\nabla f = \frac{\partial f}{h_1 \partial u_1} \hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{\partial f}{h_2 \partial u_2} \hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{\partial f}{h_3 \partial u_3} \hat{\mathbf{u}}_3 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_1 h_2) \right] \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{u}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{u}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

2.2 カートesian座標系

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (6)$$

2.3 円柱座標系

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (9)$$

2.4 極座標系

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \quad (10)$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (11)$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi} \quad (12)$$

3 スカラーラプラス演算子

3.1 曲線座標の一般形

スカラーラプラス演算子は、スカラー場 f の勾配の発散で、式 (1) と (2) を用いて、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla f &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{h_1 \partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{\partial f}{h_2 \partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{\partial f}{h_3 \partial u_3} \hat{u}_3 \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

3.2 カートesian座標

カーテシアン座標 (x, y, z) のスケール因子は、 $(1, 1, 1)$ なので、それを式 (13) に代入すれば、簡単に求められる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla f &= \frac{1}{1 \times 1 \times 1} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1 \times 1}{1} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1 \times 1}{1} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{1 \times 1}{1} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (14)$$

3.3 円柱座標

円柱座標 (r, θ, z) のスケール因子は、 $(1, r, 1)$ なので、それを式 (13) に代入すれば求められる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla f &= \frac{1}{1 \times r \times 1} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \times 1}{1} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1 \times 1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1 \times r}{1} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (15)$$

3.4 極座標

極座標 (r, θ, φ) のスケール因子は、 $(1, r, r \sin \theta)$ なので、それを式 (13) に代入すれば求められる。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla f &= \frac{1}{1 \times r \times r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \times r \sin \theta}{1} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r \sin \theta \times 1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1 \times r}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

4 ベクトルラプラス演算子

4.1 曲線座標の一般形

ベクトルラプラシアンは、ベクトル解析の恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (17)$$

に表れる。この式の右辺第 2 項がベクトルラプラス演算子 (ベクトルラプラシアン) である。従って、ベクトルラプラス演算子は、

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (18)$$

から計算できる。右辺は、勾配と発散、回転からなる。式 (1),(2),(3) を用いて計算することになるが、これには多くの計算が必要である。時間があるときに、Mathematica のような数式処理システムを使って、計算することにする。

4.2 カートesian座標

式 (18) に、式 (4),(5),(6) を代入して計算する。

$$\begin{aligned}(\nabla^2 \mathbf{A})_x &= (\nabla \nabla \cdot \mathbf{A})_x - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_x \\ &= \left\{ \nabla \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right\}_x \\ &\quad - \left\{ \nabla \times \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \right\}_x \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ &= \nabla^2 A_x\end{aligned}\quad (19)$$

カーテシアン座標系は、すべての軸が同じ形をしている。従って、他の軸のベクトルラプラス演算子は、 $x \rightarrow y \rightarrow z$ とサイクリックに記号を入れ替えることにより容易に求められる。まとめると、カーテシアン座標系のベクトルラプラス演算子は、

$$\begin{cases} (\nabla^2 \mathbf{A})_x = \nabla^2 A_x \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_y = \nabla^2 A_y \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_z = \nabla^2 A_z \end{cases} \quad (20)$$

となる。実に、単純である。

4.3 円柱座標

円柱座標系も同じようにして、ベクトルラプラス演算子を求めることができる。式 (7),(8), (9) を式 (18) に代入すればよい。

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{A})_r &= (\nabla \nabla \cdot \mathbf{A})_r - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_r \\ &= \left\{ \nabla \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \right\}_r \\ &\quad - \left\{ \nabla \times \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \right\}_r \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{A_r}{r} + \frac{\partial A_r}{\partial r} \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[A_\theta + r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} \\ &= -\frac{A_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \\ &= \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \end{aligned} \quad (21)$$

次に、 θ 方向であるが、カーテシアン座標系みたいに添え字を入れ替えるだけではすまない。式 (21) の途中までは、添え字が異なるだけで同じである。異なる部分から計算を進めると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[A_r + r \frac{\partial A_r}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{A_\theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \\ &= \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \\ &= \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \end{aligned} \quad (22)$$

最後に、 z 方向である。同じように計算をする。

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \mathbf{A})_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial A_r}{\partial z} - r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[A_r + r \frac{\partial A_r}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta \partial z} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \\
&= \nabla^2 A_z
\end{aligned} \tag{23}$$

これまでの結果をまとめると、円柱座標系のベクトルラプラス演算子は、次のようになる。

$$\begin{cases} (\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_z = \nabla^2 A_z \end{cases} \tag{24}$$

4.4 極座標

極座標系のベクトルラプラス演算子の計算は、円柱座標よりもさらに大変である。ここでは結果を載せることにとどめる。簡単に計算する方法が分かれば、これを改訂して載せる。

極座標 (r, θ, φ) のベクトルラプラス演算子は、次のようになる。

$$\begin{cases} (\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_\varphi = \nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \end{cases} \tag{25}$$