軸対称高周波電磁場の汎関数

山本昌志[*]

2005 年 1 月 24 日

1　はじめに

ここでは、軸対称共振空洞内の電磁場を計算するときの、汎関数を示す。このような問題は、小柴正則氏の「光・波動のための有限要素法の基礎」 [1] に詳しく書かれている。ここでの記述もこれを参考にしている。より深く学習したい人は、この教科書を一読することを薦める。

2　軸対称空洞

加速器では、荷電粒子に高周波電磁場のエネルギーを与え、加速している。この電磁場のエネルギーを粒子の運動エネルギーに変換する装置が加速空洞である。それは、図 1 のような形状をしており、電磁場の共振空洞になっている。荷電粒子が空洞に入ると、その軸上の電場により、ローレンツ力を受けて、加速されるわけである。周期的に、その電場の方向や強さが変わるため、その周期に合わせて、荷電粒子を空洞内に入れることになる。

加速に必要なエネルギーは、電磁波として外部から与えられる。与える電磁波の周波数と加速空洞の共振周波数を一致させなくてはならない。そうしないと、空洞内部に電磁波を貯めることができないからである。また、効率等を考えると、共振周波数のみならず電磁場分布も重要な因子となる。そのようなわけで、空洞を設計するときには、その内部の電磁場の解析は重要なのである。

3　高周波電磁場が満たす偏微分方程式

ここでは、マクスウェルの方程式から電磁場が満たす波動方程式を導き、それが満たす汎関数を示す。

3.1　マクスウェルの方程式

このあたりの説明は、以前示したヘルムホルツ方程式[1] の話とほとんど同じである。ただ、汎関数の計算に便利なようにちょっとだけ偏微分方程式の形を変えているのと、計算過程が少し異なる。本質的には全く

[*]独立行政法人秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

[1]http://www.akita-nct.jp/ yamamoto/study/electromagnetics/Helmholtz_eq/html/Helmholtz_eq.html

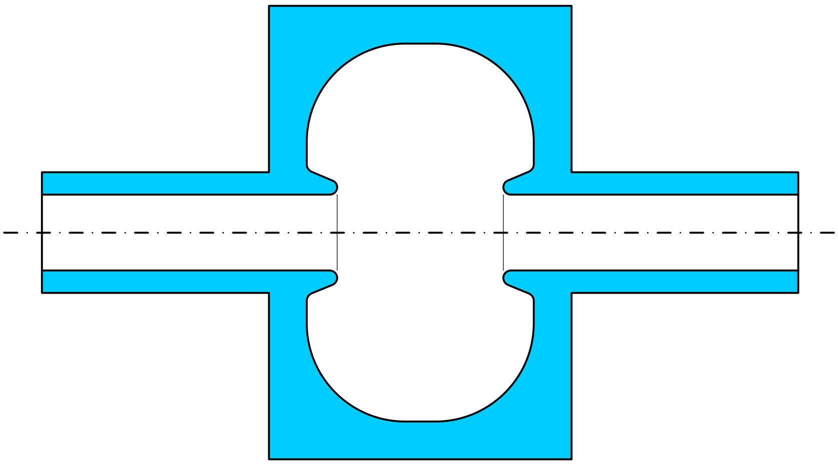

図 1: 共振空洞の例 (KEK の PF の空洞)

同じである。

ここでは軸対称構造の共振空洞内の共振モードの電磁場の方程式を示す。この場合、内部は真空で、金属で囲まれた空間になる。当然、ここの電磁場はマクスウェルの方程式で記述される。ただし、内部には電荷も電流が無いという条件が付される。マクスウェルの方程式で、$\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$ となる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4}$$

また、誘電率と透磁率は一定で、それぞれ ε_0, μ_0 となる。そして、

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{6}$$

の関係がある。式 (1)〜(4) は、連立の偏微分方程式なので、計算しやすい形に直すことにする。

まずは、磁場の方程式を求めることにする。そのために、式 (4) の両辺に回転の演算子を作用させる。そうすると、

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} &= \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\right) \\
&= -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \\
&= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。これは、波動方程式である。電磁波の速度は光速 c で、この方程式では

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \tag{8}$$

となる。従って、磁場 H が満たす方程式は、

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{9}$$

となる。

この式も、場所と時間の両方の項の偏微分方程式なので、解くのは面倒である。そのため、

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) f(t) \tag{10}$$

と変数分離ができるか考える。通常、変数分離はできるか否かは分からないので、とりあえずやってみることにする。式 (10) を (9) に入れると

$$\nabla \times \nabla \times \{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) f(t)\} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) f(t)\} \tag{11}$$

となり、時間と空間の微分を考えると

$$f(t)\nabla \times \nabla \times \{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\} = -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{f(t)\} \tag{12}$$

となる。以降、簡素に記述するために、磁場の空間の関数を $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{H_r}$ と、時間の関数 $f(t)$ は f_t とする。ここで、変数分離のいつものパターンで、左辺と右辺に、時間及び空間のみ関数にしたいわけだが、ベクトルの演算なので少し気をつける。そのため、この式の両辺に $\boldsymbol{H_r}/(\boldsymbol{H_r}\cdot\boldsymbol{H_r})$ なるベクトルの内積の演算を施す。すると

$$f_t \frac{\boldsymbol{H_r}}{\boldsymbol{H_r}\cdot\boldsymbol{H_r}}\cdot\{\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H_r}\} = -\frac{\boldsymbol{H_r}\cdot\boldsymbol{H_r}}{\boldsymbol{H_r}\cdot\boldsymbol{H_r}}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} \tag{13}$$

となる。これを整理すると、

$$\frac{\boldsymbol{H_r}}{\boldsymbol{H_r}\cdot\boldsymbol{H_r}}\cdot\{\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H_r}\} = -\frac{1}{f_t}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} \tag{14}$$

である。この偏微分方程式は、左辺は空間 $\boldsymbol{r}$、右辺は時間 t のみの関数である。それぞれ別の独立変数となっているので、この等式が成り立つためには、その値は定数でなくてはならない。この定数を ω^2/c^2 とする[2]。そうすると、

$$\frac{\boldsymbol{H_r}}{\boldsymbol{H_r}\cdot\boldsymbol{H_r}}\cdot\{\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H_r}\} = -\frac{1}{f_t}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{15}$$

である。2 番目と 3 番目の式から、時間のみの微分方程式がつるられ、それはもはや偏微分方程式ではなく、常微分方程式

$$\frac{d^2 f_t}{dt^2} = -\omega^2 f_t \tag{16}$$

[2] ω^2/c^2 と 2 乗にするのは、後の計算が簡単になるからである。ω を複素数の範囲まで考えると、その定数を a とするのと同じである。

になる。この微分方程式は、簡単に解けて

$$f_t = ae^{-i\omega t+\theta_0} \tag{17}$$

となる。ここで、a と θ_0 は初期条件により決まる定数である。これで、変数分離した解 (10) の時間の項が求まったわけである。この時間の項は、三角関数になっている。

残りの空間の項 $\boldsymbol{H_r}$ について、考えなくてならない。それが満たす偏微分方程式を得るために、時間の項の結果である式 (17) を、式 (12) に適用する。すると、

$$ae^{-i\omega t+\theta_0}\left[\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H_r}\right] = -\boldsymbol{H_r}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(ae^{-i\omega t+\theta_0}\right) \tag{18}$$

となる。時間の項の微分を行うと、

$$ae^{-i\omega t+\theta_0}\left[\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H_r}\right] = \boldsymbol{H_r}\frac{\omega^2}{c^2}\left(ae^{-i\omega t+\theta_0}\right) \tag{19}$$

となる。即ち時間の微分 $(\partial/\partial t)$ は、$-i\omega$ に置き換えられるのである。さらに整理すると、

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H_r} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\boldsymbol{H_r} \tag{20}$$

となる。これが、磁場の空間の偏微分連立方程式で、境界条件を課して解くことになる。その解は磁場の空間分布を表す。これと、式 (17) を掛けあわせたものが実際の電磁場の状態を表す。

この方程式の解は波になっており、電磁場は複素数で書かれるのが普通である。従って、式 (20) の $\boldsymbol{H_r}$ は複素数である。磁場を実数部と虚数部

$$\Re(\boldsymbol{H_r}) = \boldsymbol{H}_r \tag{21}$$

$$\Im(\boldsymbol{H_r}) = \boldsymbol{H}_i \tag{22}$$

とする。磁場の空間部分布を表す複素数 $\boldsymbol{H_r}$ の $\boldsymbol{r}$ は太文字で、その実数部である $\boldsymbol{H}_r$ の r は通常の書体で記述しているので注意してほしい。これらを使って、式 (20) を実数部と虚数部を分けた方程式にすると、

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}_r = \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{H}_r \tag{23}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}_i = \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{H}_i \tag{24}$$

となる。式 (20) は、この 2 つの微分方程式を含んでいることを忘れてはならない。

特に、進行波 (Travelling Wave) を解析するときには、磁場は複素数になるので注意が必要である。しかし、双方の方程式は同じではないか、と言う疑問が湧くかもしれない。微分方程式は同じであるが境界条件が異なるから、実数部と虚数部の解は異なる。

定在波 (Standing Wave) の場合は、実数部のみを考える。磁場は実数とするのである。虚数部としても良いが、今までの慣習で実数部のみとする事になっている。

以上で、高周波電磁場の磁場が満たすべき方程式を示した。磁場と全く同じ方法で、電場が表す方程式を計算できる。それは

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E_r} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\boldsymbol{E_r} \tag{25}$$

となる。

電磁場分布を表す方程式は、磁場を表す式 (20) と電場を表す式 (25) がある。それぞれは、独立ではなくマクスウェルの方程式の式 (3) や (4) で関連づけられている。境界条件を考え計算しやすい方の場を求め、もう一方の場はマクスウェルの方程式に代入 (微分) することにより計算することになる。

3.2 汎関数

ここでは、磁場の空間分布を示す式 (20) の汎関数を示す。電場についての式 (25) も同じなので、読み替えてほしい。

式 (20) の汎関数は

$$F[\boldsymbol{H}] = \int \left[(\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}^*) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^* \right] dV \tag{26}$$

である。ここで、$\boldsymbol{H}$ は磁場の空間分布である。式 (20) では $\boldsymbol{H_r}$ としていたが、簡潔に記述するために、添え字の $\boldsymbol{r}$ を省くことにする。また、アスタリスク $*$ は複素共役 (complex conjugate) を表す。このように複素共役を使うと、汎関数が実数になり、ちょっとだけ計算が簡単になる。また、汎関数はエネルギーに関係していることが多く、このようにすると磁場のエネルギーに関係した量になるのである。わざわざ、複素共役を使わないで計算しても同じ結果が得られる。この場合は、汎関数が複素数になる。

それでは、この式の第 1 変分がゼロになる条件が式 (20) を満足するかどうか調べる。第一変分は、$\boldsymbol{H}$ を $\delta\boldsymbol{H}$ 変化させたときの微小変化量で

$$\begin{aligned}
\delta F &= F[\boldsymbol{H} + \delta\boldsymbol{H}] - F[\boldsymbol{H}] \\
&= \int \left[\{\nabla \times (\boldsymbol{H} + \delta\boldsymbol{H})\} \cdot \{\nabla \times (\boldsymbol{H}^* + \delta\boldsymbol{H}^*)\} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\boldsymbol{H} + \delta\boldsymbol{H}) \cdot (\boldsymbol{H}^* + \delta\boldsymbol{H}^*) \right] dV \\
&\qquad - \int \left[(\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}^*) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^* \right] dV \\
&\qquad \text{2 次の微少量を無視すると} \\
&= \int \left[(\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot (\nabla \times \delta\boldsymbol{H}^*) + (\nabla \times \boldsymbol{H}^*) \cdot (\nabla \times \delta\boldsymbol{H}) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \{\boldsymbol{H} \cdot \delta\boldsymbol{H}^* + \boldsymbol{H}^* \cdot \delta\boldsymbol{H}\} \right] dV \\
&\qquad \text{ベクトル恒等式 } \nabla \cdot (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{W}) \text{ を上 手につかう} \\
&\qquad \boldsymbol{V} = (\nabla \times \boldsymbol{H}) \text{ あるいは } (\nabla \times \boldsymbol{H}^*), \quad \boldsymbol{W} = \delta\boldsymbol{H}^* \text{ あるいは } \delta\boldsymbol{H} \text{ とする。} \\
&= \int \left[-\nabla \cdot \{(\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \delta\boldsymbol{H}^*\} + \delta\boldsymbol{H}^* \cdot \{\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H})\} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\boldsymbol{H} \cdot \delta\boldsymbol{H}^*) \right] dV \\
&\qquad + \int \left[-\nabla \cdot \{(\nabla \times \boldsymbol{H}^*) \times \delta\boldsymbol{H}\} + \delta\boldsymbol{H} \cdot \{\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}^*)\} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\boldsymbol{H}^* \cdot \delta\boldsymbol{H}) \right] dV \\
&\qquad \text{この式に発散定理を使い、式を整理すると} \\
&= -\int [(\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \delta\boldsymbol{H}^* + (\nabla \times \boldsymbol{H}^*) \times \delta\boldsymbol{H}] \cdot \boldsymbol{n} dS + \\
&\qquad \int \left[\left\{ \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{H} \right\} \cdot \delta\boldsymbol{H}^* + \left\{ \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H}^* - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \boldsymbol{H}^* \right\} \cdot \delta\boldsymbol{H} \right] dV
\end{aligned} \tag{27}$$

となる。

いつものように、任意の $\delta \boldsymbol{H}$ に対して、この第一変分 δF がゼロになる条件を考える。しかし、今回は今までの「軸対称静電場の汎関数 」や「軸対称静磁場の汎関数 」と趣が異なり、関数が複素数になっている。第 1 変分 δF は実数であるが、$\boldsymbol{H}$ や $\delta \boldsymbol{H}$ は複素数である。この複素数の実数部と虚数部の変化に対して、第 1 変分がゼロとならなくてはならない。わかりやすくするために、複素数になっている部分を

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_r + i\boldsymbol{H}_i \tag{28}$$

$$\delta\boldsymbol{H} = \delta\boldsymbol{H}_r + i\delta\boldsymbol{H}_i \tag{29}$$

と実数部と虚数部に分ける。これらを、式 (27) に代入すると、

$$\begin{aligned}\delta F = -2\int [(\nabla\times\boldsymbol{H}_r)\times\delta\boldsymbol{H}_r + (\nabla\times\boldsymbol{H}_i)\times\delta\boldsymbol{H}_i]\cdot\boldsymbol{n}dS+ \\ 2\int\left[\left\{\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}_r - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\boldsymbol{H}_r\right\}\cdot\delta\boldsymbol{H}_r + \left\{\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}_i - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\boldsymbol{H}_i\right\}\cdot\delta\boldsymbol{H}_i\right]dV\end{aligned} \tag{30}$$

となる。これが、実数部と虚数部に分けた汎関数の第 1 変分である。もちろん、任意の $\delta\boldsymbol{H}$ に対して、これがゼロになる条件を考えるのである。任意の $\delta\boldsymbol{H}$ と言うことは、任意の $\delta\boldsymbol{H}_r$ と $\delta\boldsymbol{H}_i$ に対して、第 1 変分がゼロになる条件を探すのである。

そのためには、この式の右辺第 1 項と 2 項がともにゼロにならなくてはならない。右辺第 1 項は、境界条件を表し、

$$\begin{cases}(\nabla\times\boldsymbol{H}_r)\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{または} \qquad \delta\boldsymbol{H}_r = 0 \\ \qquad\qquad \text{かつ} \\ (\nabla\times\boldsymbol{H}_i)\times\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{または} \qquad \delta\boldsymbol{H}_i = 0\end{cases} \tag{31}$$

の場合、ゼロとなる。通常は、$(\nabla\times H)\times\boldsymbol{n} = 0$ とする。これが自然境界条件で、ノイマン条件となる。この磁場の回転は、式 (4) より、$\nabla\times H = i\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ となる。従って、ノイマン条件は、$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}$ と書き直すことができる。すなわち、電場と境界の法線方向が一致するのである。これは、金属の境界条件である。すなわち、境界を指定しなければ、自然に金属の境界条件が満足されるのである。一方、$\delta\boldsymbol{H} = 0$ はディレクイ条件で、境界の値を指定した場合である。

第 2 項がゼロとなるのは、

$$\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}_r - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\boldsymbol{H}_r = 0 \\ \qquad\qquad \text{かつ} \\ \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}_i - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\boldsymbol{H}_i = 0\end{cases} \tag{32}$$

となる必要がある。これは、マクスウェルの方程式から導かれた磁場の偏微分方程式 (25) と全く同等である。

以上のことから、高周波の電磁場の磁場を計算するためには、式 (26) の第一変分をゼロにすればよいことが分かる。静磁場のマクスウェルの方程式は、式 (26) の第 1 変分をゼロにするのと等しいのである。

電場については、ここでは計算しないが、全く同じ手順で求められる。そして、結果も全く同じである。

4　軸対称定在波問題

4.1　汎関数

ここでは、図 1 のような、軸対称空洞内部の電磁場を求めるための汎関数を示す。問題は定在波に限るものとする。

軸対称問題は、円柱座標系を使うのがセオリーである。この場合、空洞の形状は完全軸対称である。定在波の場合、磁場は実数として取り扱うことができる。式 (26) では円柱座標系の回転の演算が表れ、それは

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \left[\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \tag{33}$$

である。

一般には、これを、汎関数の式 (26) に代入することになる。しかし、通常の空洞では最も共振周波数の低いモードが重要になる。図 1 の加速空洞の場合、最低次の TM モードが運転に使われる。これが、運転モードとなり、真っ先に解析したいモードである。このモードは、場が $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 方向の依存性を持たず、磁場は H_θ のみである。このモードの磁場の回転は、

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{H} &= \left[-\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)\right]\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \left(-\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{H_\theta}{r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{34}$$

となる。この回転の結果を汎関数の式 (26) に適用すると、

$$\begin{aligned}F[H_\theta] &= \int \left[\left(\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{H_\theta}{r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H_\theta^2\right] dV \\ &= \int \left[\left(\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{H_\theta}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \left(\frac{H_\theta}{r}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H_\theta^2\right] 2\pi r dr dz\end{aligned} \tag{35}$$

となる。

4.2　電場の計算

有限要素法を用いて、式 (35) の第 1 変分がゼロとなる H_θ が、軸対称空洞の磁場になる。この磁場から、電場を求めるためには、式 (4) を使う。これを、式 (19) を変形したように、時間の微分の項を $-i\omega$ に置き換えと、

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega \boldsymbol{D} \tag{36}$$

となる。式 (5) を使うと電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{i}{\varepsilon_0 \omega}\nabla \times \boldsymbol{H} \tag{37}$$

と求められる。ここで、円柱座標系の回転 を計算することになる。それは、式 (33) のとおりで、ここでは H_θ のみなので、先に示した式 (34) のようになる。従って、電場は

$$E_r = -\frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \tag{38}$$

$$E_z = \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \left(\frac{H_\theta}{r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) \tag{39}$$

となる。

5 軸対称進行波問題

先の定在波の問題とほとんど同じである。ただし、この場合は、境界条件が難しくなる。時間のある時にこの辺の話を書くことにする。

参考文献

[1] 小柴正則. 光・波動のための有限要素法の基礎. Information & Computing-26. 森北出版株式会社, 1998.