ヘルムホルツ方程式

山本昌志*

2005 年 1 月 12 日

1　概要

空洞内の電磁場はマクスウェルの方程式から求められるが、実際にはそれに条件を課し、ヘルムホルツ方程式を計算することになる。ここでは、特に、ヘルムホルツ方程式をきちんとまとめることにする。もちろん、ここで書かれている内容は、いろいろな文献に書かれているが、私なりに、できるだけ分かりやすく解説するつもりである。

2　マクスウェルの方程式から、ヘルムホルツ方程式へ

2.1　マクスウェルの方程式

電磁現象を記述する微分方程式は、マクスウェルの方程式と呼ばれ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4}$$

と書かれる 4 組の連立の微分方程式である。ここで、

記号	物理量	単位	スカラー/ベクトル
$\boldsymbol{D}$	電束密度	[C/m^2]	ベクトル
$\boldsymbol{B}$	磁束密度	[T] あるは [Wb/m^2]	ベクトル
$\boldsymbol{H}$	磁場 (の強さ)	[A/m]	ベクトル
$\boldsymbol{E}$	電場 (の強さ)	[V/m]	ベクトル
ρ	電荷密度	[C/m^3]	スカラー
$\boldsymbol{j}$	電流密度	[A/m^2]	ベクトル

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

である。物質中では、

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{7}$$

という関係で結びつけられている。ここで、ε は誘電率、μ は透磁率、σ 導電率である。これらの量は、一般[1]には 2 階のテンソルになる。

2.2　ヘルムホルツの方程式

ヘルムホルツ方程式は、楕円型の微分方程式で

$$\nabla^2 u + ku = 0 \tag{8}$$

の形のものを言う。u はベクトルの場合とスカラーの場合がある。ここでは、真空で何もない空間の電磁場の方程式が、この形になることを示す。ようするに、マクスウェルの方程式に何もない空間 (真空) と言う条件を課して、ヘルムホルツ方程式を導くのである。

まずは、何もない真空の空間ではあるが、そこには電磁場は存在する。しかし、電荷や電流は存在しないものとする。従って

$$\rho = 0 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{j} = 0 \tag{10}$$

$$\sigma = 0 \tag{11}$$

となる。また、真空中では誘電率や透磁率は一定で、それらは ε_0, μ_0 と書き表すことにする。これら、真空中という条件をまとめると、マクスウェルの方程式は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{12}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{13}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{15}$$

となる。これは、電場と磁場の連立微分方程式である。

これをそのまま計算するのは大変なので、電場、あるいは磁場のみの式に直す。そのために、式 (14) の両辺に回転の演算子を作用させる。すると、

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{16}$$

[1] 異方性の物質も含めると言う意味。等方性の物質の場合、スカラー量として扱える。

となる。この式の左辺はベクトル恒等式と式 (13) を用いると

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} &= \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{H} - \nabla^2 \boldsymbol{H} \\
&= -\nabla^2 \boldsymbol{H}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

と変形できる。一方、式 (16) の右辺は時間と空間の微分である回転を入れ替え、式 (15) を用いると、

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E}) \\
&= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right) \\
&= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

となる。これら、左辺と右辺の結果の式 (17), (18) から、式 (16) は

$$
\nabla^2 \boldsymbol{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{19}
$$

と書き直せる。これが、磁場を表す微分方程式である。この式は、空間の 2 回微分と時間の 2 回微分の項が現れており、波動方程式になっている。この式は、何もない空間で時間変化する電磁場は波になっていると言っているのである。波であれば、その速度があり、この式から電磁場の伝搬速度 c は、

$$
c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{20}
$$

が分かる。この c は光速を示し、電磁場の伝搬速度速度である。驚いたことに、誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 が光速と関係しているのである。

時間変化する波を解析する場合、周波数に分解して考えるのは常套手段である。ここでは、それをフーリエ解析を用いて丁寧に示すことにする。ここの磁場 H は、時間と空間の関数である。そして、時間の関数は変数分離できることは直感的に理解できる。したがって、磁場は

$$
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) f(t) \tag{21}
$$

と書き表せるだろう。そして、この時間の項 $f(t)$ をフーリエ変換すると

$$
g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \tag{22}
$$

となる。この $g(\omega)$ を用いて、フーリエ逆変換することにより、時間の項は

$$
f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{23}
$$

と表せる。これで、式 (19) をヘルムホルツ方程式に直す準備は整った。

波動方程式 (19) の磁場 $H(vmr)$ の項を変数分離して、その時間の項をフーリエ解析で処理すれば、目的のヘルムホルツ方程式が得られる。まずは、式 (19) を式 (21) を用いて、変数分離すると、

$$
\nabla^2 \left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) f(t)\right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) f(t)\right] = 0
$$

時間と空間の微分を分けると

$$
f(t) \nabla^2 \left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right] - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f(t)\right] = 0 \tag{24}
$$

と書き表すことができる。この式に、フーリエ解析の式 (23) を適用すると、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\nabla^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right] = 0 \tag{25}$$

となる。時間の 2 階微分は、$(-i\omega)^2$ がでるため、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\nabla^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{26}$$

と書き表せる。積分の項は同じなので、両辺をそれで割ると、

$$\nabla^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{27}$$

とヘルムホルツ方程式が得られる。ここで、この微分方程式の解である $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を固有関数、$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ を固有値と言う。

電場の場合も全く同様にして求められる。電場の場合は

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{28}$$

となる。

ヘルムホルツ方程式は、時間の微分が入らないため、計算がきわめて簡単になる。この 2 階の微分方程式を適当な境界条件を課して、解けば電磁場が分かる。これは、モードに分けて計算しているので、時間の項は全て $e^{-i\omega t}$ がかかることになる。この辺の話は、また機会があるときにする。