ベクトル解析の諸々の定理

山本昌志*

2007 年 5 月 15 日

概 要

ベクトル解析の復習の仕上げとして，電磁気学の学習に必要な諸定理を説明する．ディラックのデルタ関数とグリーンの定理，ベクトル場を決める関数について述べる．

1　先週の復習と本日の授業内容

1.1　先週の復習

ベクトル場やスカラー場の積分についてのべた．勾配と発散，回転の意味を示し，その積分を与えた．得られた重要な結果は，以下の公式である．

$$\phi(\boldsymbol{r}_2)-\phi(\boldsymbol{r}_1)=\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1}$$

$$\int_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{2}$$

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{3}$$

1.2　本日の授業内容

本日は，ベクトル解析で現れる諸定理について述べる．多くは，文献 [1] を参考にしている．この本は，応用がかなり書かれており，わかりやすいくて良い．数学に偏ってないので，私は読みやすくて好きである．

2　ディラックのデルタ関数

2.1　デルタ関数のイメージ

大きさの無い電荷や，作用している時間がゼロの衝撃力等を表したいことがある．このような場合，ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を使うと便利である．この関数は，$x=0$ のとき無限大の値となり，$x\neq 0$ なら

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

ば値はゼロとなる．そして，積分を行うと 1 となる関数[1]である (図 1)．すなわち，

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1 \tag{5}$$

である．これを使うと，都合良く電荷密度を表すことができるが，それはこれからの講義内容である．しかし，衝撃力を表すのにうってつけであることは理解できるであろう．

いろいろな $\delta(x)$ 関数が考えられる．その中でも，直感的にもっともわかり易いのは，図 2 のようなものである．この図の $\varepsilon \to 0$ の極限をデルタ関数とする．デルタ関数の定義である式 (4) や (5) を満足していることが分かるだろう．

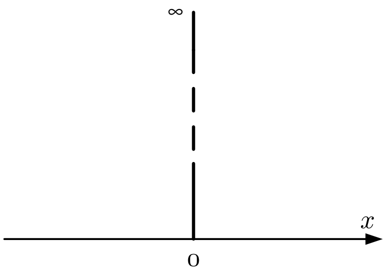

図 1: ディラックのデルタ関数

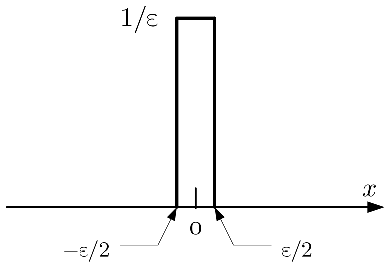

図 2: $\varepsilon \to 0$ の極限がデルタ関数

2.2 さまざまな積分とデルタ関数の定義

このデルタ関数の重要な関係式を示しておこう．

2.2.1 さまざまな積分

積分 1 まずは，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) \mathrm{d}x = f(a) \tag{6}$$

である．これは，図 2 をデルタ関数として，次のようにして計算できる．

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) \mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} \frac{f(x)}{\varepsilon} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(a+\varepsilon/2) - F(a-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \\ &= f(a) \end{aligned} \tag{7}$$

[1]普通の関数と性質が異なるので，超関数と呼ぶらしい．

積分 2　先ほどの積分は直感的に理解できるであろう．それに対して，次はちょっと難しい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x = -f'(a) \tag{8}$$

これは，次のように，部分積分を使って計算する．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x &= \Big[f(x)\delta(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x \\ &= -f'(a)\end{aligned} \tag{9}$$

フーリェ変換　これは，計算するまでもなく．

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{10}$$

となる．これは，非常に短いパルスのノイズは，広帯域の周波数成分があることを示している．短パルスのノイズは広帯域なので，フィルターで取り除くことは難しい．

三次元　一次元とほとんど同じで，三次元に拡張することができる．基本的な性質は，

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq 0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = 0 \end{cases} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = 1 \tag{11}$$

である．同様に積分は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\mathrm{d}V = f(\boldsymbol{a}) \tag{12}$$

となる．これらの振舞いは，一次元とほぼ同じなので，細かい説明はしない．

2.2.2　デルタ関数の定義

これまで，デルタ関数のいろいろな性質を見てきた．いったい，デルタ関数はどのように定義すればよいのだろうか？ これまででもっとも一般的な—デルタ関数の性質に関して最も広い範囲をカバーする—式は，

$$\delta(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{ただし，} \boldsymbol{r} \neq 0 \text{ の場合} \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\mathrm{d}V = f(\boldsymbol{a}) \tag{14}$$

である．式 (4) や式 (5) に代わり，これをデルタ関数の定義[2]としよう．これが関数の定義としてふさわしいかどうか—という議論もあるだろう．ちゃんとした定義は数学者に考えてもらえばよく，我々はこれで十分である．物理的な内容を便利に表すことができるからである．

[2]定義に積分を使っているが，リーマン積分はできない．

2.3　ラプラス演算子との関係

2.3.1　特異点が原点の場合

つぎにラプラス演算子との関係を示す．後に重要となる公式で，電磁気学ではとくに有用である．もっとも重要な公式は，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

である．

これを証明するためには，ちょっと頑張らなくてはならない．まずは，左辺であるが，以前の課題に出したように

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)&=\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\\&=\nabla\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\nabla(r)\\&=\nabla\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\\&=-\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\cdot\boldsymbol{r}-\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\boldsymbol{r}\\&=\left(\frac{3}{r^4}\right)\nabla r\cdot\boldsymbol{r}-\frac{3}{r^3}\\&=\left(\frac{3}{r^4}\right)\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)\cdot(x,y,z)-\frac{3}{r^3}\\&=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\\&=0\qquad\text{ただし，}r\neq0\text{のとき}\end{aligned} \tag{16}$$

となる．これで，式 (11) の原点 ($\boldsymbol{r}\neq0$) 以外は証明できた．原点は特異点となる．

原点 ($\boldsymbol{r}=0$) での値を計算するために，式 (15) の左辺を体積分する．図 3 のように，原点を含まない場合，

$$\int_V\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0 \tag{17}$$

となる．いまのところ，この結果には面白いところはない．値がゼロのところを積分して，ゼロが得られただけである．

図 4 のように積分領域に原点が含まれる場合，大事な結果が得られる．原点は特異点なので，そのまま積分はできない．そこで，原点を含まない領域で積分をする．複素関数論でコーシーの積分公式を導くのとと同じ方法である．このようにすると，積分領域に原点が含まれなくなり，積分の値はゼロとなる．そして，

連結部を非常に小さくとり，体体積分を面積分に直すガウスの定理を使うと，式 (15) の左辺の体積分は

$$\begin{aligned}\int_{V'}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V &= \int_S \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\ &= \int_{S1}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \int_{S2}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\ &= \int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V - \int_{S2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{18}$$

となる．ここで，V' は原点を含まない領域に対して，V は原点を含む．V' には原点が含まれないので，積分の値はゼロとなる．従って，

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = \int_{S2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{19}$$

となる．これで原点を含んだ領域 V の積分の準備ができた．この右辺の領域を球形にする．すると図から明らかに，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ は $-r$ となる．右辺は，表面積を乗じるだけで

$$\begin{aligned}\int_{S2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S &= -\int_{S2}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}S \\ &= -\frac{4\pi r^2}{r^2} \\ &= -4\pi \end{aligned} \tag{20}$$

となる．従って，

$$\int_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V = -4\pi \tag{21}$$

となる．これと，式 (16) とデルタ関数の定義から，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{22}$$

とかける．これで，式 (15) が証明できた．これは，今後しばしばお目にかかる式である．ただし，積分を行うときに重要な意味があることを忘れてはならない．

　ところで，式 (21) は不思議な式である．被積分関数は原点を除いてゼロである．原点の値は不定であるが，積分を行うとちゃんとした値になる．

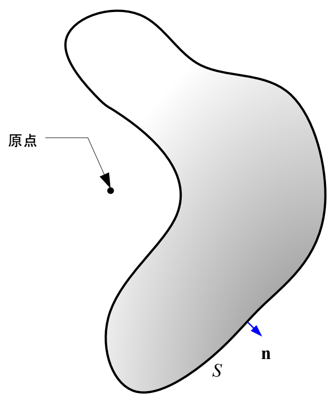

図 3: 原点が積分領域に含まれない場合

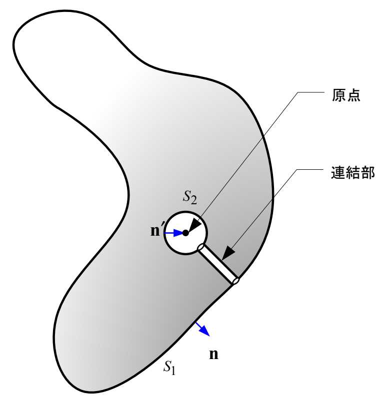

図 4: 積分領域に原点が含まれる場合

2.3.2　特異点が任意の位置

ラプラス演算子が $\boldsymbol{r}$ に作用する場合　次に被積分関数の特異点の位置を変えてみよう．先ほどは原点に特異点があったが，ここでは位置 $\boldsymbol{r}'$ に特異点を移動する．この場合，明らかに

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{23}$$

となる．このとき，$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$ という関係も満たす．絶対値—位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{r}$ の距離—はどちらを基準にしても変化がないからである．これより，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) \tag{24}$$

が得られる．

　また，デルタ関数の性質より，$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$ である．デルタ関数の定義の式 (13) に関する矛盾はない．次に式 (14) に関しては，実際に計算してみる．途中，変数変換 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$ を使うと，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\mathrm{d}V&=-\int_{\infty}^{-\infty}f(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V_x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x})\mathrm{d}V_x\\&=f(\boldsymbol{r}')\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{25}$$

となる．これから，$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$ がいえるのである．こんな面倒なことをしなくても，直感的に理解できるだろう．

　ここでの結果をまとめると，次のようになる．

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{26}$$

ラプラス演算子が $\boldsymbol{r}'$ に作用する場合　次に，$\boldsymbol{r}'$ に作用するラプラス演算子

$$\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right) \tag{27}$$

を導入する．先ほどの結果から，明らかに

$$\nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{28}$$

の関係がある．すべての変数を，プライムの付くものと付かないものを入れ替えただけである．

まとめ　これらの結果をまとめると，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) = \nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = \nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{29}$$

となる．プライムが付くものと付かないものを入れ替えてよいのである．これは後々，かなり便利に使える．

この入れ替えができる演算は限られており，次のような場合は入れ替えができないことに注意が必要だ．

$$\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) \tag{30}$$

3　グリーンの定理

3.1　1 変数関数の部分積分

グリーンの定理は，1 変数の関数の部分積分の公式に似ている．部分積分は，関数の積の微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f'g + fg' \tag{31}$$

から導ける．両辺を積分し，順番を入れ替えると

$$\int f'g\mathrm{d}x = fg - \int fg'\mathrm{d}x \tag{32}$$

となり，部分積分の公式が導かれた．

このように単純な方法で導かれる部分積分の公式は，本当に便利でいたるところに現れる．このベクトル解析版が，次に述べるグリーンの定理である．

3.2　スカラー場での部分積分

[**グリーンの定理**] スカラー場 $f(x,y,z)$ と $g(x,y,z)$ があるとする．この領域内の閉じた任意の部分を V とする．そして，この V の境界面を S とする．すると，以下が成り立つ．

$$\int_V (\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g)\mathrm{d}V = \int_S f\nabla g\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{33}$$

$$\int_V \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right)\mathrm{d}V = \int_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{34}$$

これをグリーンの定理という

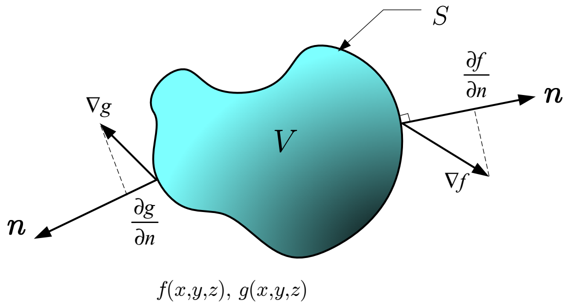

図 5: グリーンの定理の領域

【証明】 1 ベクトル解析の恒等式

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g \tag{35}$$

の両辺を体積積分する．左辺にはガウスの定理を用いると，

$$\int_S f \nabla g \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \left(\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g \right) \mathrm{d}V \tag{36}$$

である．これで，式 *(33)* が証明できた．

式 *(35)* と，これの f と g を入れ替えたの辺々を引き算すると，

$$\nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f \tag{37}$$

となる．同じように体積積分をしてガウスの定理を使うと，式 *(34)* を得ることができる．

注意 1 グリーンの定理は，

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial n} \tag{38}$$

として，

$$\int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) \mathrm{d}V = \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{39}$$

$$\int_V \left(g \nabla^2 g - f \nabla^2 g \right) \mathrm{d}V = \int_S \left(g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) \mathrm{d}S \tag{40}$$

と書かれる場合もある．

4 ベクトル場の性質

4.1 ベクトル場を決めるもの

定理 4.1
任意の領域のベクトル場は，その内部で発散と回転を与え，そして領域の境界での法線方向の成分を与えれば，一意に決まる．

【証明】 **2** この定理は，発散と回転と境界条件を決めればベクトル場が決まると言っている．これは，次のようにして証明できる．発散 $\rho(x,y,z)$ と回転 $\boldsymbol{j}(x,y,z)$ とした場合

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}_1=\rho \tag{41}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{j} \tag{42}$$

とする．問題は，この発散 $\rho(x,y,z)$ と回転 $\boldsymbol{j}(x,y,z)$ を与えた場合，ベクトル場が一意に決まるかということである．

$\boldsymbol{V}_1$ と同一の境界条件で式 *(41)* と *(42)* を満たす他のベクトル場 V_2 があるとする．ここで，$\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2$ がゼロならば，ベクトル場は一意に決まると言える．これらの式を満たすベクトル場は無いと言えるからである．そこで，

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2 \tag{43}$$

とおく．このベクトル場 $\boldsymbol{W}$ 発散は，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{W}&=\nabla\cdot(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2)\\&=\nabla\cdot\boldsymbol{V}_1-\nabla\cdot\boldsymbol{V}_2\\&=0\end{aligned} \tag{44}$$

である．すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ は湧き出しが無い．また，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ の回転は，

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{W}&=\nabla\times(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2)\\&=\nabla\times\boldsymbol{V}_1-\nabla\times\boldsymbol{V}_2\\&=0\end{aligned} \tag{45}$$

となる．すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ には回転が無い．ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ は回転がないので，

$$\boldsymbol{W}=-\nabla\phi \tag{46}$$

とスカラー場を用いて記述ができる．ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ には湧き出しが無い *(*$\nabla\cdot\boldsymbol{W}=0$*)* ことから，

$$\nabla^2\phi=0 \tag{47}$$

である．

これで準備が整った．$\boldsymbol{W}$ が考えている空間 V にわたってゼロであることを証明したい．そのためには，

$$\int_V\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\mathrm{d}V=0 \tag{48}$$

が言えればよい．$\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}$ はベクトル $\boldsymbol{W}$ の大きさの *2* 乗で必ずゼロ以上である[3]．従って，その積分がゼロとなるためには，いたるところで $\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}$ がゼロとならなくてはならない．従って，$\boldsymbol{W}$ が積分区間で全てゼロの場合のみ，式 *(48)* が成り立つ．

[3] $\boldsymbol{W}$ が複素ベクトルの場合は，$\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}^*$ となり，ゼロ以上である．$\boldsymbol{W}^*$ は複素共役を表す．

与えられた条件で式 *(48)* の右辺を計算して，それがゼロになることを確認する．取り合えず，左辺に分かっている条件を入れて計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
\int_V \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\mathrm{d}V &= \int (-\nabla\phi)\cdot(-\nabla\phi)\,\mathrm{d}V \\
&= \int \nabla\phi\cdot\nabla\phi\mathrm{d}V \\
&\qquad\qquad \text{グリーンの公式の } (34) \text{ から} \\
&= \int_S \phi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S - \int_V \phi\nabla^2\phi\mathrm{d}V \\
&\qquad\qquad \text{式 } (46) \text{ と } (47) \text{ から} \\
&= -\int_S \phi\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\int_S \phi\left(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\int_S \phi\left(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}S \\
&\qquad\qquad \text{境界では，} \boldsymbol{V}_1 \text{と} \boldsymbol{V}_2 \text{ の法線成分は等しいので} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{49}
$$

となる．従って，定理が証明できた．

この定理のなにがうれしいかというと，ベクトル場を記述する微分方程式は，回転と発散で良いと言うことを示していることである．いろいろな法則は微分方程式で記述しなくてはならないが，ベクトル場の場合は回転と発散の値を決めれば，ベクトル場が決まると言うことである．境界条件は必要であることは言うまでもない．

4.2 ベクトル場の微分方程式について

4.2.1 ベクトル場の微分方程式の解

証明すべき内容 ベクトル場を表す微分方程式

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \qquad\qquad \nabla\times\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{50}
$$

が分かったのでその解を示す．ここで，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルを表す．先に示したように，これらの方程式と境界上でのベクトル $\boldsymbol{V}$ の法線方向の値を決めれば，ベクトル $\boldsymbol{V}(r)$ は一意に決まる．

結論から先に言うと，ベクトル $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は，

$$
\boldsymbol{V} = -\nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{51}
$$

となる．ここで，$\phi(\boldsymbol{r})$ はスカラポテンシャル，$A(\boldsymbol{r})$ はベクトルポテンシャルで次のようにして計算できる．計算するときの座標系は，図 6 の通りである．積分の範囲は無限遠までである．

$$
\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad\qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{52}
$$

これが本当に成り立つか証明しなくてはならない．そのためには，式 (50) が表すベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ と，式 (51) と式 (52) がつくるベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が等しいことをいえばよい．ベクトル場が等しいためには，前節の「ベクトル場を決めるもの」で述べたように，おのおののベクトル場の発散と回転が等しいことを言えばよい．式 (50) が表すベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の発散と回転は，それぞれ $\rho(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ である．したがって，式 (51) と式 (52) がつくるベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が式 (50) のベクトル場と等しくなるためには，

$$-\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right)=\rho(\boldsymbol{r}) \tag{53}$$

$$\nabla\times\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{54}$$

となる必要がある．なぜならば，回転の発散はゼロだし発散の回転もゼロで，ベクトル場は発散と回転を決めれば一意に決まるからである．したがって，これらの式を証明することになる．**[注意]** これらの式の演算子 ∇ は全て，プライムのつかない座標に作用する．

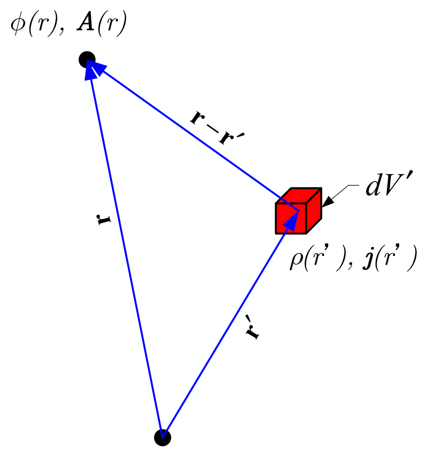

図 6: 原点と積分の座標系

発散の式　まず最初の式 (53) を証明する．$\nabla\cdot\nabla$ は ∇^2 とスカラーラプラス演算子に書き換えてもよい．さらに，このラプラス演算子は座標系 $\boldsymbol{r}$ に作用し，積分は $\boldsymbol{r}'$ に作用する．したがって，積分と微分の順序を入れ換えてもよい．式 (53) の左辺は，

$$\begin{aligned}
-\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V' \\
&\qquad \text{式 (29) より} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \\
&= \rho(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{55}$$

となる．これで，式 (53) が証明できた．

回転の式　つぎに式 (54) を証明する．この証明には，任意のベクトル場 $\boldsymbol{w}$ について成り立つ，ベクトル恒等式

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{w}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{w}-\nabla^2\boldsymbol{w} \tag{56}$$

をつかう．右辺の ∇^2 はベクトルラプラス演算子であることに注意が必要である．この恒等式を使うと，式 (54) の左辺は，

$$\nabla\times\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right)=\frac{1}{4\pi}\nabla\int_{V'}\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V' \tag{57}$$

となる．

はじめに，右辺第一項を計算する．∇ 演算子は $\boldsymbol{r}$ のみに作用するので，

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \tag{58}$$

となる．また，部分積分も必要[4]となるのでそれも示す．ベクトル場の微分から，

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \tag{59}$$

が得られる．これらの式と式 (30) を用いて計算すると式 (57) の右辺第一項に関して以下を得る．

$$\begin{aligned}
\nabla\int_{V'}\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V' &= \nabla\int_{V'}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'\\
&= -\nabla\int_{V'}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'\\
&= \nabla\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'-\nabla\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'\\
&= \nabla\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'-\nabla\int_{S'}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S'
\end{aligned} \tag{60}$$

次に式 (57) の右辺第二項を計算する．はじめにベクトルラプラス演算子を丁寧に計算する．被積分関数は

$$\begin{aligned}
\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\{j_x(x',y',z'),j_y(x',y',z'),j_z(x',y',z')\}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\\
&= (j_x,\,j_y,\,j_z)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\\
&= \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)
\end{aligned} \tag{61}$$

となる．これと，式 (29) を使うと，この右辺第二項は

$$\begin{aligned}
\int_{V'}\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V' &= \int_{V'}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\nabla'^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'\\
&= \int_{V'}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\\
&= -4\pi\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{62}$$

[4] 式 (57) の左辺第一項の積分の被積分関数が積の形になっており，その項のひとつが微分したものとなっている．通常このような場合，部分積分を用いる．

となる．

式 (60) と式 (62) より，式 (57) は，

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right)&=\frac{1}{4\pi}\nabla\int_{V'}\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{4\pi}\nabla\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\nabla\int_{S'}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S'+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\end{aligned}\tag{63}$$

となる．このうち，右辺第一項は式 (50) の第二式より，直ちにゼロになることが分かる．回転の発散は恒等的にゼロになるからである．右辺第二式は問題で，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が $1/r$ よりも早くゼロに近づけば，積分範囲を無限にとればゼロになる．あるいは無限遠点で $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ がゼロになれば，積分はゼロになる．電磁義気学で現れる量はこの条件を満たす．要するに無限遠では何もない—ということである．全宇宙の端は何もないと考える．こうしないと，式 (52) の積分は発散してしまう．このように少しだけ制限はあるものの，式 (57) は，

$$\nabla\times\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'\right)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\tag{64}$$

となり，式 (54) が証明できた．

以上より，ベクトル場を表す微分方程式 (50) の解は，式 (51) と式 (52) で表すことができる．諸君はベクトル場を表す微分方程式とその解を得たことになる．

4.2.2 ヘルムホルツの定理

先に示したように，任意のベクトル場は渦無し (irrotational) と管状 (solenoidal)[5]の和であらわすことができる．すなわち，次のようにである．

$$\boldsymbol{V}=-\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{A}\tag{65}$$

任意のベクトル場は，渦無しと管状のベクトル場から出来上がっている．言い替えると，ベクトル場は渦無しと管状の 2 種類がある．これを**ヘルムホルツの定理**と言う．

渦無しと管状の意味を述べておいた方がよいだろう．$\nabla\phi$ から作られるベクトル場は渦無しである．これは

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\phi&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\frac{\partial\phi}{\partial x}&\frac{\partial\phi}{\partial y}&\frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}\\&=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\&=0\end{aligned}\tag{66}$$

[5]渦無しに対して，渦有りと表現した方が良いと思うが，管状と言う．英語の直訳のためであろう．

から，わかる．回転がゼロなので，渦無しである．一方，

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times A) &= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{67}$$

であるから，$\nabla \times \boldsymbol{B}$ から作られるベクトルは管状である．

参考文献

[1] ジョージ・アルフケン．ベクトル・テンソルと行列．基礎物理学 1. 講談社, 1993.