静磁場

山本昌志[*]

2007 年 6 月 19 日

1　本日の授業内容

本日は静磁場の話をする．電場と磁場の在り方はかなり異なるが，よく似た方法で取り扱い，その発散と回転を求めることが本日の主題である．本日の学習内容は以下の通りである．

- 磁荷とクーロンの法則
- 電流の磁気作用
- 磁場に関するガウスの法則
- 積分型のアンペールの法則
- 微分型のアンペールの法則

2　エルステッド の発見とアンペールの法則

2.1　磁石

磁石が鉄などの磁性体を引きつけることはよく知られている．諸君は，これまで学習してきた静電的な作用よりも，磁石による作用の方がおなじみかもしれない．磁石の N 極と N 極，あるいは S 極と S 極は反発し，N 極と S 極は引きつけあう．これは，静電場の時に学習したクーロンの法則の電荷の作用と似ている．磁荷の間に働く力を記述した磁荷におけるクーロンの法則と言うものがある．それは，N 極の磁荷を正の値，S 極の磁荷を負の値で表し[1]，それらの間に働く力の大きさが

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m Q_m}{r^2} \tag{1}$$

となることを示す．ここで，μ は真空の透磁率で，とりあえず比例定数と思って欲しい．q_m と Q_m は磁荷で単位は [Wb] である[2]．

このように電荷と磁荷はよく似ているが，決定的に異なることがある．電荷は単独で取り出すことができるが，**磁荷は絶対に単独では存在しない**のである[3]．このことは，図 1 で示すように，磁石を半分にしてや

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

[1]本当は，正負はどうでもよい

[2]ウェーバと読む

[3]単独の磁荷は観測されていない

はり N 極と S 極があり，それを半分にしてもその断片にも両方の極が存在することからも分かる．N 極あるいは S 極のみの断片は作れないのである．それに対して，電荷の場合，図 2 のように帯電した棒を分割すると，正または負のみに帯電した断片を作ることができるのである．

電荷の場合と異なり単独の磁荷が存在しないと言うことは，式 (1) が成り立つ状況は自然には起きえないと言うことである．しかし，磁荷の考えが全く間違っているとも言えない場合がある．適当に，正負の磁荷が等量分布していると仮定すると，観測される磁場と同じものを計算上，作ることが可能である．これは計算のテクニック上で正しい磁場を作っているにすぎず，単独の磁荷はやはり存在しないことを忘れてはならない．このテクニックは磁石の磁場を考える場合使われることがある．

電荷のクーロンの法則を使うことは多いが，磁荷の式 (1) はほとんど使われない．少なくとも，私は一回も使ったことがない．したがって，諸君は磁荷のクーロンの法則は忘れて良い．

それならば，クーロンはこの磁荷の式 (1) をどのようにして発見したのであろうか?．興味があるものは，実験方法について，調べよ．

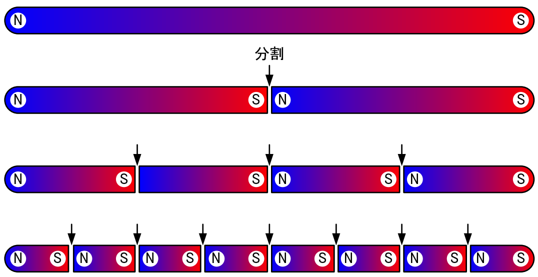

図 1: 磁石の分割．矢印で分割しても，断片には N と S の両極が存在する．

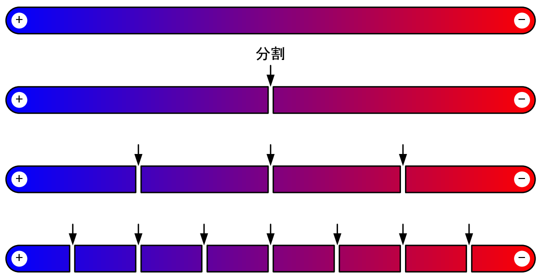

図 2: 帯電棒の分割．矢印で分割すると，正または負の単独電荷の断片ができる．

2.2 電流の磁気作用

2.2.1 電流が磁石に作用することの発見

最初に磁石による力，磁力を発見したのは誰かは分からないが，その解析的な研究の先鞭をつけたのは，コペンハーゲン大学のエルステッド教授 (Hans Christian Oersted, 1777-1851) であろう．彼は，1819 年から 1820 年の冬に，電気学や磁気学の講義をしていた．当時，電流と電荷の間には何か関係があると考えていた人がいた．どちらも，触るとビリッとするからである．なんとも，頼りない理由ではあるが，そう考えたのは偉い．ただ，エルステットの方は，少し変わっていて，電流と磁石になんらか関係があると考えたようである．

どのようにして，この考えに至ったかは分からないが，電流を流すと方位磁石は力を受けて，方向が変わると考えた．磁石は力を受けて，電流と同じ方向，あるいは反対の方向に向くと考えた．これはもっともなことで，電線に流れている電流が，磁石の北の先端が受ける力は，対称性から考えて，右や左であるわけがない．電流と同じ方向か，その反対である．そこで，学生の前で，図 3 のように，磁石と電線を配置して，スイッチを入れた．結果は，期待に反して，磁石は動かなかったのである．これは，磁石の方向と電流が作

る磁場の方向が一致していたために動かなかったのである．ここで，電流を反対にすれば，磁石が 180 度回転して，それはドラマチックなことが起きたはずであるが，なぜかエルステットは，反対に電流を流していない．それにしても，1/2 の確率でエルステットは運がなかった．

しばらく，自分の考えがうまくいかないことに，悶々としていたエルステットは，何を思ったか，あるいは実験を間違えたか，磁石と電線を同じ方向に向けて，電流を流した．そうすると，磁石が 90 度回ったのである．これには，エルステットも驚いたに違いない．対称性から考えて，どうしてもありえないことが起こったのである[4]．1820 年の春のことである．エルステットはなかなか納得がいかなかったが，実験を繰り返し，その事実を認めた．そして，その発見について，その年の 7 月に報告書を書いた．

この報告書が他の研究所に届くや否や，多くの実験が行われ，新たな発見が相次いだ．

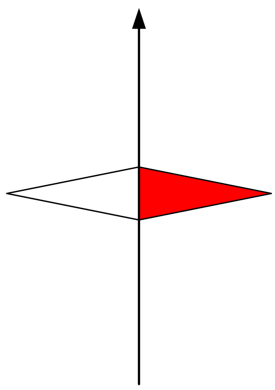

図 3: 東西に電線を張る

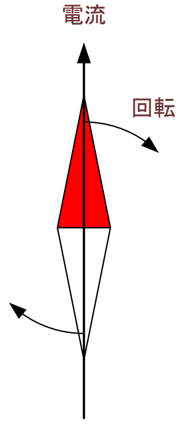

図 4: 電線を南北に張る

2.2.2　磁場

エルステッドの実験結果が各地に伝わると，ビオ (Biot) とサバール (Savart)，そしてアンペール (Ampere) がより精密で完全な実験を行った．そして，2 本の平行な導線間には力が働くことがわかった．長さ $\mathrm{d}\ell$ の導線に加わる力 $\mathrm{d}F$ は，導線間の距離 R に反比例し，それぞれの電流 I_1 と $I2$ の積に比例する．そして，力の方向は電流が同じ方向ならば引力で，反対ならば斥力となる．式で表すと

$$\mathrm{d}F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 \mathrm{d}\ell}{R} \tag{2}$$

である[5]．ここで，μ は真空の透磁率と呼ばれるもので，今のところ比例定数と考えて欲しい．その値は，$4\pi\times10^{-7}$ である．

この電流が流れる導体間に働く力について，近接作用の考えを取り入れることにしよう．電流は場を作り，

[4]この現象は，実際には対称性が破れてはいない

[5]実は，この式が電流を定義している．すなわち，1[m] 離した 2 本の平行な導線に電流流し，単位長さあたり 2×10^{-7}[N] の力が働いたとき，その電流を 1[A] とする．

その場からもう一方の導線に力が作用すると考える．この場を磁場 B_1 と言い，それを用いると，式 (2) は，

$$F_1 = I_1 \mathrm{d}\ell \times B_1 \tag{3}$$

$$B_1 = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I_2}{R} \tag{4}$$

となる．磁場 B_1 の単位は [T] と書き，テスラと読む．この 2 番目の式は，1 本の直線電流が作る磁場の大きさを示している．

この磁場については，導線の方向を変えたりして詳細に調べられて．その結果，1 本の直線電流が作る磁場は，

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{R}}{R^2} \tag{5}$$

となることが分かった．これがビオとサバールが最初に実験によって発見した結果である．有名なジャクソンの電磁気学 [1] には，これをビオ-サバールの法則と書いている．普通，ビオ-サバールの法則は後から出てくる式 (**??**) を指す．

本講義では，実験的に求められた式 (5) を出発点として，静磁場の理論を構築する．静電場の場合，クーロンの法則を出発点として全ての式を導いた．それと同様のことを静電場で行う．静電場との対応を考えると，後で出てくるビオ-サバールの法則の式 (12) から議論をはじめると計算が簡単で良い．しかし，式 (12) を直感的に理解することは不可能である．なにせ，電流が途中で切れている．電荷保存則が成り立っていない—そんなこと想像できるか!!

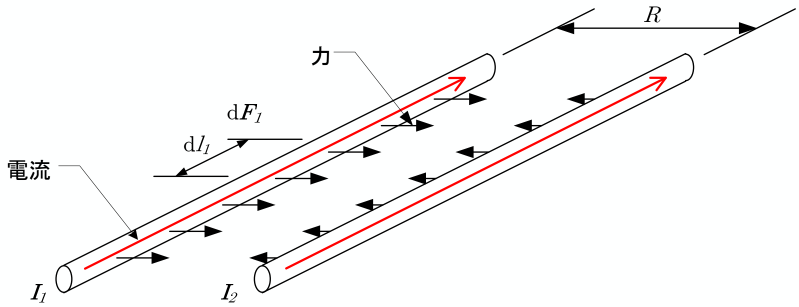

図 5: 電線間に働く引力

3 静磁場の基本法則

3.1 ビオ・サバールの法則

式 (5) は，無限に長い電流が作る磁場である．これが分かると，微小な長さ $\mathrm{d}z$ が作る磁場の式が欲しくなる．磁場は全ての電流を積分して得られる—となると理論を考えるのに大変都合が良い．図 6 のような

状況を考える．図中の点 P の作る磁場は，式 5 から分かっている．ここの磁場は，dz が作る磁場 dB を足しあわせたもの—積分—になるはずである．したがって，

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{R}}{R^2}=\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{I},\boldsymbol{r})\mathrm{d}z \tag{6}$$

となる $f(\boldsymbol{I},\boldsymbol{r})$ があるはずである．このように表すと，dz が作る磁場 dB は

$$\mathrm{d}B=f(\boldsymbol{I},\boldsymbol{r})\mathrm{d}z \tag{7}$$

となる．ここまでくれば，$f(\boldsymbol{I},\boldsymbol{r})$ の関数形を求めることが重要な問題となる．ビオとサバールはここまで考えて歴史に名前を残した．だれでもここまでたどり着ければ，関数形を見つけることはできるであろう．科学史に名前を残すためには，時代の最先端にたどり着くことが如何に大事か—がわかる．

dB がベクトルなので，$f(\boldsymbol{I},\boldsymbol{r})$ もベクトルになる必要がある．幸いなことに，磁場 B は電流 $\boldsymbol{I}$ とも位置 $\boldsymbol{r}$ にも垂直である．そこで，微小磁場 dB は，ベクトル積 $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}$ に関係がある—と類推できる．また，遠距離 r が離れると，磁場が小さくなることも理解できるであろう．問題は距離の何乗で小さくなるか?—である．ここでは，距離の 2 乗としてみよう．間違っていれば，1 乗にしたり，3 乗にしてみて，正しい関数形を探せばよい．科学史に名前を残すことを考えると，これくらいの努力をしてもよいだろう．これまでの直感から，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=k\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}z \tag{8}$$

とかける．比例定数の k は後から調整すればよい．

この式を地道に積分を行う．計算する積分は

$$\boldsymbol{B}=k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}z \tag{9}$$

である．ベクトルの積分となっており，通常はやっかいである．しかし，幸いなことに，$\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{r}$ はいつも同じ平面内にあり，z の位置が変わってもベクトル積の向きは変化しない．したがって，スカラーの積分を行った後，方向を考えればよい．

$$\begin{aligned}B&=k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Ir\sin\theta}{r^3}\mathrm{d}z\\&=k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I\sin\theta}{r^2}\mathrm{d}z\\&=k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{IR}{r^3}\mathrm{d}z\\&=kIR\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\\&=kIR\left[\frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}\\&=\frac{2kI}{R}\end{aligned} \tag{10}$$

この結果と式 (5) を比べる．先の述べたように方向は合っている．また，係数 k を

$$k=\frac{\mu}{4\pi} \tag{11}$$

とすれば，大きさも合う．したがって，微小領域 dz がつくる微小磁場 d$\boldsymbol{B}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}z \tag{12}$$

と考えても良い．普通，これをビオ-サバールの法則と言う．また，$\boldsymbol{I}$dz を d$\boldsymbol{I}$ として，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \tag{13}$$

と書かれる場合もある．

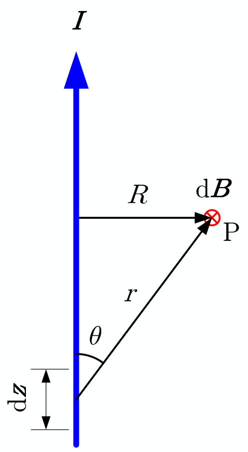

図 6: 無限直線電流と磁場

3.2　ベクトルポテンシャル

式 (12) は，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}z\mathrm{d}z \tag{14}$$

と書き表すことができる．ここで，$\boldsymbol{j}$ は電流密度である．dI = dxdy をつかっている．

これから，磁場を観測する位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とした場合の磁場は，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}\mathrm{d}V' \tag{15}$$

となる．これが磁場を表す方程式の全てである．これは，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\left[\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\mathrm{d}V'\right] \tag{16}$$

と書き表すことができる．なぜならば，$\boldsymbol{c}$ を定ベクトルとした場合，

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} &= \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \times \boldsymbol{c} \\
&= \nabla \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \times \boldsymbol{c} \\
&= -\frac{(x-x', y-y', z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \times \boldsymbol{c} \\
&= \frac{\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

が成り立つからである．

式 (16) は，

$$
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{18}
$$

と書くことができる．ただし，

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\mathrm{d}V' \tag{19}
$$

である．この $\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルと言う．ちょうど電場のときのスカラーポテンシャル ϕ に対応している．

3.3 磁場を表す微分方程式

この式から磁場を表す微分方程式を求める．ベクトル場を表す微分方程式は，発散と回転である．先の磁場を表す方程式に発散と回転の演算を行えばよい．この辺の話は，文献 [1] を参考にした．

式 (16) から，直ちに，

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{20}
$$

が求められる．なぜならば，回転の発散は恒等的にゼロとなるからである．

つぎに回転をもとめる．この場合，任意のベクトル場 $\boldsymbol{w}$ に関しての恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{w} = \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{w} - \nabla^2\boldsymbol{w}$ を使う．式式 (16) の両辺に回転の演算を施すと，

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \nabla\times\nabla\times\left[\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\mathrm{d}V'\right] \qquad (21)\\
&= \frac{\mu}{4\pi}\nabla\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right)\mathrm{d}V' - \frac{\mu}{4\pi}\int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right)\mathrm{d}V'
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right) \qquad \nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{22}
$$

を使う．これらの式については，第 5 回の講義ノート[6]を見よ．これらを使うと，

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right)\mathrm{d}V'+\mu\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \\
&= -\frac{\mu}{4\pi}\nabla\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right)\mathrm{d}V'+\mu\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \qquad (23)
\end{aligned}
$$

が得られる．

この式の右辺第一項を計算するために，任意のベクトル場 A と任意のスカラー場 f の積の発散を考える．それは，

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=\nabla f\cdot\boldsymbol{A}+f\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{24}$$

となる．これを少しばかり変形すると

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})-f\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{25}$$

が得られる．式 (23) のように微分が含まれる積分を行うときの定石である．部分積分である．

式 (25) を式 (23) に適用すると，

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\left[\nabla\int\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right)\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})\mathrm{d}V'-\nabla\int\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\right)\mathrm{d}V'\right]+\mu\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{26}$$

となる．このうち，左辺の第一項はゼロとなる．なぜならば，電荷保存則より静電場ではいつでも $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$ が成り立つからである．そして，右辺第二項は，ガウスの発散定理を使うと，

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mu}{4\pi}\nabla\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}\mathrm{d}S'+\mu\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{27}$$

が得られる．右辺第一項の積分は，全空間，すなわち宇宙全体にわたっての面積分である．宇宙の端には電流が無い，あるいは電流密度が $1/r$ よりも早く小さくなると右辺第一項はゼロになる．自然は，これら二つのうちどちらかを満たしている．なぜならば，ここで観測している磁場は宇宙の果てからの影響を受けていない．したがって，静磁場の回転は，

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{28}$$

となる．電流密度は，磁場の回転 (の密度) を作るのである．

[6] http://akita-nct.jp/yamamoto/lecture/2007/p1/5th/html/index.html

4　本日のまとめ

- 電流は磁場を作り，それは右ねじと同じように考えることができる．右ねじの回転方向が，磁場の方向を表し，ねじの進む方向が電流を表す．
- 磁場の発散はゼロである．これは，磁荷が存在しないと言っている．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

- 磁場の回転を示すアンペールの法則は，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

である．電流が磁場の回転を作ると言うことを言っている．これを積分形にしたければ，ストークスの定理を使う．

5　課題

[**問題 1**]　教科書　p.71 の練習問題 (1), (4), (5)

5.1　レポート提出要領

提出方法は，次の通りとする．

期限	6 月 26 日 (火)PM1:05 まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト，または講義開始時に手渡し
表紙	表紙を 1 枚つけて，以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電磁気学特論」 課題名「課題　静磁場」 生産システム工学専攻　学籍番号　氏名 提出日
内容	問題の解答．計算課程をきちんと書くこと．

参考文献

[1] J. D. Jackson. ジャクソン 電磁気学 (上). (株) 吉岡書店, 原書第 3 版, 2002.