試験問題 (生産システム工学専攻 電気磁気学特論)

生産システム工学専攻　　学籍番号　　　　氏名

[問 1] $\boxed{20\text{点}}$

$$
\begin{aligned}
\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x,\, 2y,\, 2z) \\
&= -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x,\, y,\, z) \\
&= 1+1+1 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (x,\, y,\, z) \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

デルタ関数は，図 1 の $\varepsilon \to \infty$ と定義する．問題により与えられた式を定義にしたがって計算する．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} \frac{f(x)}{\varepsilon}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(a+\varepsilon/2) - F(a-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \\
&= f(a)
\end{aligned}
$$

これで，問題で与えられた計算の完了である．

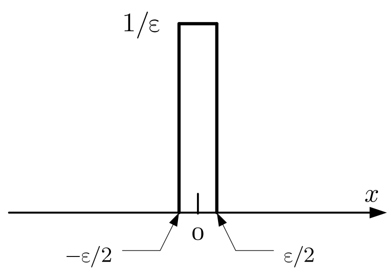

図 1: $\varepsilon \to 0$ の極限がデルタ関数

[問 2] $\boxed{20\text{点}}$

コンデンサーの片側の電極の電荷量 Q と電圧 V，静電容量 C には，

$$Q = CV$$

の関係がある．コンデンサーの内側の電極 (半径 a) に Q の電荷，外側の電極 (半径 b) に $-Q$ の電荷がある状態の電圧 (ポテンシャル) から，静電容量を求めることにする．この電圧は電場を積分する事により求めるのが簡単である．問題が，全て球形なので極座標系を用いることにする．内側と外側の電極間に生じる電場は，対称性により

$$E_\theta = 0 \qquad\qquad E_\varphi = 0$$

となり，E_r を求めることに問題は帰着される．これは，積分形のガウスの法則

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

を用いることにより容易に計算できる．内側と外側の間に同心の球の領域を考え，この法則を適用する．左辺は，

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_r \qquad a \le r \le b$$

となる．一方，右辺は

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

この右辺と左辺は等しいので，電極間の電場は

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad a \le r \le b$$

となる．

これから電極間の電位差は，この電場を積分することにより求められる．積分の結果は

$$
\begin{aligned}
V(a) - V(b) &= -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}
\end{aligned}
$$

となる．

最初に示した関係式から，静電容量は，

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{Q}{V} \\
&= Q\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q}\frac{ab}{b-a} \\
&= \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}
\end{aligned}
$$

と求められる．

[問 3] 10 点

点 O から直線電流に沿った座標を x とする．A の方向が負で B の方向が正とする．このときの微小磁場は，ビオ・サバールの法則より

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}x \times \boldsymbol{r}}{r}$$

となる．ここで，P 点での磁場は紙面と垂直方向であり，$|\mathrm{d}x \times \boldsymbol{r}/r| = \sin\theta \mathrm{d}x$ となる．x の位置によらず磁場の方向は同じなので，$\mathrm{d}B$ とスカラーで書いても良いだろう．微小磁場は，

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \sin\theta \mathrm{d}x}{4\pi r^2}$$

となる．これを積分すればよいのだが，そのために，

$$\tan\theta = -\frac{R}{x} \qquad r\sin\theta = R$$

をつかう．これらから，

$$\mathrm{d}x = \frac{R}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \qquad r = \frac{R}{\sin\theta}$$

これらを使うと，

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

となり，A から B まで積分を行うと，

$$\begin{aligned} B &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right] \end{aligned}$$

となる．

[問 4] 20 点

微分形のマクスウェルの方程式は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

これらの式を

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \qquad \text{ガウスの定理}$$
$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S = \oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\ell \qquad \text{ストークスの定理}$$

を使って、積分形に書き直す。

マクスウェルの方程式の 1 番目の式の両辺を体積積分を行い、ガウスの定理を使うと

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V = \int_V \rho\mathrm{d}V \quad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \quad \int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_V \rho\mathrm{d}V$$

となり、積分形のガウスの法則が得られる。

同じことをマクスウェルの方程式の 2 番目の式に施すと

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = 0 \quad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \quad \int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 0$$

が得られる。これが磁場に関する積分形のガウスの法則である。

次に、マクスウェルの方程式の番目の式に面積積分を行い、ストークスの定理を使うと

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}S = \int_S \left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}S$$
$$\text{ストークスの定理} \Rightarrow$$
$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

が得られる。これは、積分形で表したファラデーの電磁誘導の法則である。

最後は、マクスウェルの方程式の 4 番目の式に同じようにストークスの定理を応用すると

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}S = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}S$$
$$\text{ストークスの定理} \Rightarrow$$
$$\int_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

が得られる。これは、積分形のアンペール-マクスウェルの法則である。

[問 5] $\boxed{\textit{10}\ 点}$

自由空間では，電流や電荷はない．したがって，マクスウェルの方程式の中で，$\rho = 0$，$\boldsymbol{j} = 0$ とすればよい．すると，自由空間での電磁場を表すマクスウェルの方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

が得られる．

この式のうち 3 番目の式の両辺に回転の演算子を作用させると，

$$\begin{aligned} 左辺 &= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \\ &\qquad \text{マクスウェルの方程式の 4 番目の式より} \\ &= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

となり，電場のみの式にできる．ここで，右辺第一項であるが，これはベクトル恒等式 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ を使い，

$$\begin{aligned} 左辺 &= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ &\qquad \text{マクスウェルの方程式の 1 番目の式より} \\ &= -\nabla^2 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

と変形できる．右辺は恒等的にゼロなので，回転の演算子を作用させても，ゼロである．左辺と右辺は等しいので，

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

が得られる．

[問 6] $\boxed{\textit{20}\ 点}$

スカラーポテンシャルが満たすべき方程式は，

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

である．グリーン関数は，問題で与えられているので，この方程式の解は次のとおりである．

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V' G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t') \left[\frac{\rho(\boldsymbol{r}', t')}{\varepsilon_0} \right] \\ &\qquad \text{問題で与えられたグリーン関数を代入する} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V' \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c} \right) \\ &\qquad \text{デルタ関数の性質 } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a) \text{ を使う} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V' \end{aligned}$$

これで，問のスカラーポテンシャルが得られた．