ベクトル解析の諸々の定理

山本昌志*

2006 年 5 月 18 日

概 要

ベクトル解析の復習の仕上げとして，電磁気学の学習に必要な諸定理を説明する．ディラックのデルタ関数とグリーンの定理，ベクトル場を決める関数について述べる．

1 先週の復習と本日の授業内容

1.1 先週の復習

ベクトル場やスカラー場の積分についてのべた．勾配と発散，回転の意味を示し，その積分を与えた．

1.2 本日の授業内容

本日は，ベクトル解析で現れる諸定理について述べる．多くはは，文献 [1] を参考にしている．この本は，応用がかなり書かれており，わかりやすいくて良い．数学に偏ってないので，私は読みやすくて好きである．

2 ディラックのデルタ関数

大きさの無い電荷や，作用している時間がゼロの衝撃力等を表したいことがある．このような場合，ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を使うと便利である．この関数は，$x = 0$ のとき無限大の値となり，$x \neq 0$ ならば値はゼロとなる．そして，積分を行うと 1 となる関数[1]である (図 1)．すなわち，

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2}$$

である．これを使うと，都合良く電荷密度を表すことができるが，それはこれからの講義内容である．しかし，衝撃力を表すのにうってつけであることは理解できるであろう．

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

[1] 普通の関数と性質が異なるので，超関数と呼ぶらしい．

いろいろな $\delta(x)$ 関数が考えられる．その中でも，直感的にもっともわかり易いのは，図 2 のようなものである．この図の $\varepsilon \to 0$ の極限をデルタ関数とする．デルタ関数の定義である式 (1) や (2) を満足していることが分かるだろう．

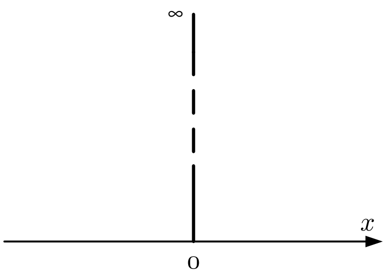

図 1: ディラックのデルタ関数

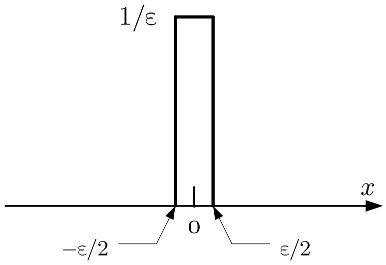

図 2: $\varepsilon \to 0$ の極限がデルタ関数

このデルタ関数の重要な関係式を示しておこう．

積分 1　まずは，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x = f(a) \tag{3}$$

である．これは，図 2 をデルタ関数として，次のようにして計算できる．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2}\frac{f(x)}{\varepsilon}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(a+\varepsilon/2)-F(a-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \\ &= f(a) \end{aligned} \tag{4}$$

積分 2　先ほどの積分は直感的に理解できるであろう．それに対して，次はちょっと難しい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x = -f'(a) \tag{5}$$

これは，次のように，部分積分を使って計算する．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x &= \Big[f(x)\delta(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x \\ &= -f'(a) \end{aligned} \tag{6}$$

フーリェ変換　これは，計算するまでもなく．

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{7}$$

となる．これは，非常に短いパルスのノイズは，広帯域の周波数成分があることを示している．これは，フィルターで取り除くことは難しい．

三次元　一次元とほとんど，同じで

$$
\delta(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq 0 \\ \infty & \boldsymbol{r} = 0 \end{cases} \tag{8}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V = 1 \tag{9}
$$

となる．振舞いは，一次元とほぼ同じなので，細かい説明はしない．

ラプラシアンとの関係　後で重要となる公式である．電磁気学では，とくに有用である．

$$
\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{10}
$$

これを証明するためには，ちょっと頑張らなくてはならない．まずは，左辺であるが，以前の課題に出したように

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) &= \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \nabla(r) \\
&= \nabla \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right) \\
&= -\left(\nabla \frac{1}{r^3} \right) \cdot \boldsymbol{r} - \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \boldsymbol{r} \\
&= \left(\frac{3}{r^4} \right) \nabla r \cdot \boldsymbol{r} - \frac{3}{r^3} \\
&= \left(\frac{3}{r^4} \right) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \cdot (x, y, z) - \frac{3}{r^3} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \\
&= 0 \qquad \text{ただし，} r \neq 0 \text{ のとき}
\end{aligned} \tag{11}
$$

となる．これで，式 (8) の原点 ($\boldsymbol{r} \neq 0$) 以外は証明できた．

原点 ($\boldsymbol{r} = 0$) での値を計算するために，式 (10) の左辺を体積積分する．図 3 のように，原点を含まない場合，

$$
\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \tag{12}
$$

となる．いまのところ，この結果には面白いところはない．値がゼロのところを積分して，ゼロが得られただけである．

図 4 のように積分領域に原点が含まれる場合，大事な結果が得られる．原点は特異点なので，そのまま積分はできない．そこで，原点を含まない領域で積分をする．複素関数論でコーシーの積分公式を導くのとと同じ方法である．このようにすると，積分領域に原点が含まれなくなり，積分の値はゼロとなる．そして，

連結部を非常に小さくとり，体積積分を面積積分に直すガウスの定理を使うと，式 (10) の左辺の体積積分は

$$
\begin{aligned}
\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}V &= \int_S \nabla \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \\
&= \int_{S1} \nabla \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \int_{S2} \nabla \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \\
&= \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}V - \int_{S2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる．この領域内に原点は含まれないので，この積分の値はゼロとなる．従って，

$$
\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}V = \int_{S2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{14}
$$

この右辺の領域を球形にする．すると図から明らかに，$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}$ は $-r$ となる．右辺は，表面積を乗じるだけで

$$
\begin{aligned}
\int_{S2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S &= -\int_{S2} \frac{1}{r^2} \mathrm{d}S \\
&= -\frac{4\pi r^2}{r^2} \\
&= -4\pi
\end{aligned}
\tag{15}
$$

となる．従って，

$$
\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}V = -4\pi \tag{16}
$$

となる．これと，式 (11) から，形式的に

$$
\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta(\boldsymbol{r}) \tag{17}
$$

とかける．これで，式 (10) が証明できた．これは，今後しばしばお目にかかる式である．

また，

$$
\nabla^2 \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}\right) = -4\pi \delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \tag{18}
$$

と書かれることも多い．

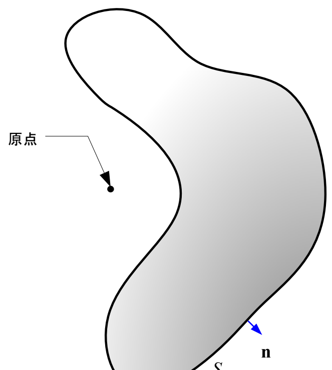

図 3: 原点が積分領域に含まれない場合

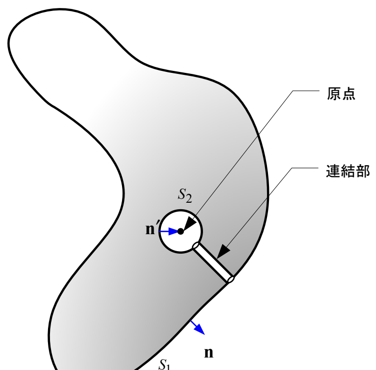

図 4: 積分領域に原点が含まれる場合

3　グリーンの定理

3.1　1 変数関数の部分積分

グリーンの定理は，1 変数の関数の部分積分の公式に似ている．部分積分は，関数の積の微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f'g + fg' \tag{19}$$

から導ける．両辺を積分し，順番を入れ替えると

$$\int f'g\mathrm{d}x = fg - \int fg'\mathrm{d}x \tag{20}$$

となり，部分積分の公式が導かれた．

このように単純な方法で導かれる部分積分の公式は，本当に便利でいたるところに現れる．このベクトル解析版が，次に述べるグリーンの定理である．

3.2　スカラー場での部分積分

定理 3.1 (グリーンの定理)

スカラー場 $f(x,y,z)$ と $g(x,y,z)$ があるとする．この領域内の閉じた任意の部分を V とする．そして，この V の境界面を S とする．すると，以下が成り立つ．

$$\int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g)\mathrm{d}V = \int_S f\nabla g \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{21}$$

$$\int_V \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right)\mathrm{d}V = \int_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{22}$$

これをグリーンの定理という

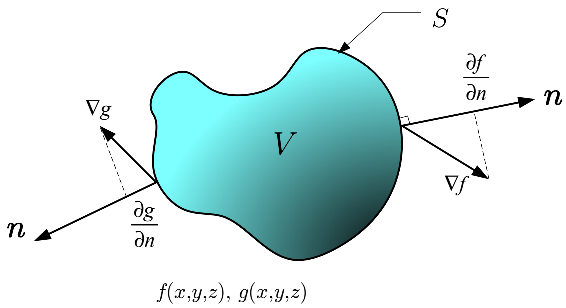

図 5: グリーンの定理の領域

【証明】 **1** ベクトル解析の恒等式

$$\nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g \tag{23}$$

の両辺を体積積分する．左辺にはガウスの定理を用いると，

$$\int_S f\nabla g\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_V\left(\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g\right)\mathrm{d}V \tag{24}$$

である．これで，式 *(21)* が証明できた．

式 *(23)* と，これの f と g を入れ替えたの辺々を引き算すると，

$$\nabla\cdot(f\nabla g-g\nabla f)=f\nabla^2 g-g\nabla^2 f \tag{25}$$

となる．同じように体積積分をしてガウスの定理を使うと，式 *(22)* を得ることができる．

注意 1 グリーンの定理は，

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial f}{\partial n} \tag{26}$$

として，

$$\int_V(\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g)\mathrm{d}V=\int_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{27}$$

$$\int_V\left(g\nabla^2 g-f\nabla^2 g\right)\mathrm{d}V=\int_S\left(g\frac{\partial f}{\partial n}-f\frac{\partial g}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{28}$$

と書かれる場合もある．

4　ベクトル場の性質

4.1　ベクトル場を決めるもの

定理 4.1

任意の領域のベクトル場は，その内部で発散と回転を与え，そして領域の境界での法線方向の成分を与えれば，一意に決まる．

【証明】 2 この定理は，発散と回転と境界条件を決めればベクトル場が決まると言っている．これは，次のようにして証明できる．発散 $\rho(x,y,z)$ と回転 $\boldsymbol{j}(x,y,z)$ とした場合

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}_1=\rho \tag{29}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{j} \tag{30}$$

とする．問題は，この発散 $\rho(x,y,z)$ と回転 $\boldsymbol{j}(x,y,z)$ を与えた場合，ベクトル場が一意に決まるかということである．

$\boldsymbol{V}_1$ と同一の境界条件で式 *(29)* と *(30)* を満たす他のベクトル場 V_2 があるとする．ここで，$\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2$ がゼロならば，ベクトル場は一意に決まると言える．これらの式を満たすベクトル場は無いと言えるからである．そこで，

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2 \tag{31}$$

とおく．このベクトル場 $\boldsymbol{W}$ 発散は，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{W}&=\nabla\cdot(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2)\\&=\nabla\cdot\boldsymbol{V}_1-\nabla\cdot\boldsymbol{V}_2\\&=0\end{aligned}\tag{32}$$

である．すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ は湧き出しが無い．また，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ の回転は，

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{W}&=\nabla\times(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2)\\&=\nabla\times\boldsymbol{V}_1-\nabla\times\boldsymbol{V}_2\\&=0\end{aligned}\tag{33}$$

となる．すなわち，ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ には回転が無い．ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ は回転がないので，

$$\boldsymbol{W}=-\nabla\phi\tag{34}$$

とスカラー場を用いて記述ができる．ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ には湧き出しが無い $(\nabla\cdot\boldsymbol{W}=0)$ ことから，

$$\nabla^2\phi=0\tag{35}$$

である．

これで準備が整った．$\boldsymbol{W}$ が考えている空間 V にわたってゼロであることを証明したい．そのためには，

$$\int_V\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\mathrm{d}V=0\tag{36}$$

が言えればよい．$\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}$ はベクトル $\boldsymbol{W}$ の大きさの 2 乗で必ずゼロ以上である[2]．従って，その積分がゼロとなるためには，いたるところで $\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}$ がゼロとならなくてはならない．従って，$\boldsymbol{W}$ が積分区間で全てゼロの場合のみ，式 (36) が成り立つ．

与えられた条件で式 (36) の右辺を計算して，それがゼロになることを確認する．取り合えず，左辺に分

[2] $\boldsymbol{W}$ が複素ベクトルの場合は，$\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}^*$ となり，ゼロ以上である．$\boldsymbol{W}^*$ は複素共役を表す．

かっている条件を入れて計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
\int_V \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\mathrm{d}V &= \int (-\nabla\phi)\cdot(-\nabla\phi)\,\mathrm{d}V \\
&= \int \nabla\phi\cdot\nabla\phi\mathrm{d}V \\
&\qquad\text{グリーンの公式の } (22) \text{ から} \\
&= \int_S \phi\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S - \int_V \phi\nabla^2\phi\mathrm{d}V \\
&\qquad\text{式 } (34) \text{ と } (35) \text{ から} \\
&= -\int_S \phi\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\int_S \phi\left(\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_2\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= -\int_S \phi\left(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}S \\
&\qquad\text{境界では，} \boldsymbol{V}_1 \text{ と } \boldsymbol{V}_2 \text{ は等しいので} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{37}
$$

となる．従って，定理が証明できた．

この定理のなにがうれしいかというと，ベクトル場を記述する微分方程式は，回転と発散で良いと言うことを示していることである．いろいろな法則は微分方程式で記述しなくてはならないが，ベクトル場の場合は回転と発散の値を決めれば，ベクトル場が決まると言うことである．境界条件は必要であることは言うまでもない．

4.2 ヘルムホルツの定理

定理 4.2 (ヘルムホルツの定理)
ベクトル場は渦無し *(irrotational)* と管状 *(solenoidal)* の和であらわすことができる．すなわち，次のようにである．

$$
\boldsymbol{V} = -\nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{38}
$$

【証明】 3 式 *(38)* の証明の前に，渦無しと管状の意味を述べておこう．$\nabla\phi$ から作られるベクトル場は渦無しである．これは

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\phi &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{39}
$$

から，わかる．回転がゼロなので，渦無しである．一方，

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times A) &= \nabla\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= 0 \qquad (40)
\end{aligned}
$$

であるから，$\nabla\times\boldsymbol{B}$ から作られるベクトルは管状である．

ここで，任意のベクトルが式 *(38)* を満たすことを証明しなくてはならない．

ちゃんと証明するとなると，もう少し，いろいろと説明する必要が分かった．簡単に説明する方法が分かったら，*web* に載せる．

参考文献

[1] ジョージ・アルフケン．ベクトル・テンソルと行列．基礎物理学 1. 講談社, 1993.