

時間的に変動する電場と磁場

山本昌志*

2006 年 7 月 6 日

概 要

時間的に系の状態が変化する場合の電磁場の方程式—マクスウェルの方程式—を導き出す．静磁場の復習からはじまり，電荷保存則を説明する．電荷保存則を拡張して，変位電流を導入する．そしてファラデーの法則を電磁場の方程式に組み込み完成とする．

1 本日の授業内容

今までは，静電場や静磁場の話であった．これは，電場や磁場がいつでも一定で，時間的に変化しない状態について説明した．通常電場と磁場は，場所 r と時刻 t の関数であるが，時刻が変わっても，それらが変化しないような状況が，静電磁場の話であった．この場合，静電磁場が一定であることは，その源も時間的に変化していないということである．

これからは，静電磁場が時間的に変化する状況を考える．本日の学習内容は以下の通りである．

- 電荷保存と変位電流
- ファラデーの電磁誘導の法則

2 電束密度と磁場の強さ

教科書の最初に電束密度 D と磁場の強さ H の式が書かれている．本講義では磁束密度 B と電場の強さ E を用いて，電磁場を表してきた．今後もそのつもりである．しかし，諸君が教科書を読むときに混乱しないように，簡単にそれらの関係を述べておいた方がよいだろう．結論から言うと次の関係がある．

$$D = \varepsilon E \quad (1)$$

$$B = \mu H \quad (2)$$

ここで， ε は誘電率， μ は透磁率を表す．これらの諸量の単位を表 1 に示しておく．

透磁率や誘電率は電磁場が存在する媒質の電磁気的な性質を表す量である．これらの意味については，来週の講義ノートで示す．

* 国立秋田工業高等専門学校 生産システム工学専攻

表 1: 電磁場を表す量と単位

記号	物理量	単位	SI 組み立て単位
D	電束密度	C/m ²	m ⁻² · s · A
B	磁束密度	T あるいは Wb/m ²	kg · s ⁻² · A ⁻¹
H	磁場 (の強さ)	A/m	A · m ⁻¹
E	電場 (の強さ)	V/m	m · kg · s ⁻³ · A ⁻¹
ε	誘電率	F/m	m ⁻³ · kg ⁻¹ · s ⁴ · A ²
μ	透磁率	H/m	m · kg · s ⁻² · A ⁻²

3 静電磁場

静電磁場を拡張して、時間変動の項を取り扱うのが分かりやすくて良いだろう。そのために静電磁場の復習をする。

静電場と静磁場はともにベクトル場である。ベクトル場を記述する微分方程式の完全な組は、その発散と回転であることは以前に示したとおりである。そこで、電場 E と磁場 B の発散と回転を示すことにする。

3.1 静電場の場合

2 つの電荷があるとそれぞれは力を及ぼしあい、その力について述べたものがクーロンの法則である。図 1 のように 2 つの電荷がある場合、 q_1 の電荷が q_2 に及ぼす力 F_2 は、

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (3)$$

となる。これがクーロンの法則で、それは、

- 力の大きさは、それらの距離の 2 乗に反比例し、電荷量の積に比例する
- 力の方向は、2 つの電荷を結ぶ直線状で、同じ電荷同士の場合は斥力で、異なる電荷であれば引力となる

と言っているのである。これから、直ちに作用・反作用の法則が成り立っていることが分かる。

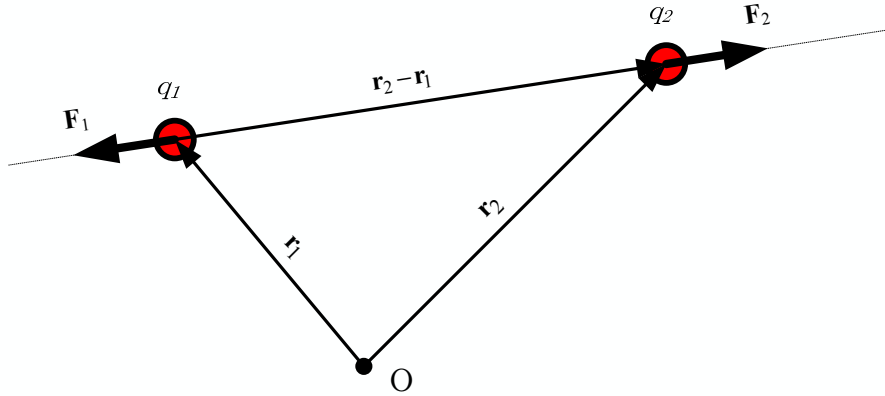


図 1: クーロン力

これが静電場のすべてで，どんな問題でもこれを計算すれば原理的に解ける．宇宙全体の電荷をすべて計算すればよいのであるが，それは实际的でない．そのため，いろいろと数学的な工夫がなされた．ただ，数学的に式を変形したと思ってはならない．かなり重要な概念が導入されることになる．

導入された概念のうち最も重要なものは，場の概念である．このクーロンの法則から静電場と言うものが考えられる．電荷が静電場を作り，その静電場が電荷に力の作用を及ぼすのである．先のクーロンの法則から，電荷 q_1 は r_2 の位置に E_2 という電場を作るのである．この電場が電荷 q_2 に作用して， F_2 という力を及ぼすのである．これは，

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}_2 \quad (5)$$

と書くことができる．これらの式は，式 (3) とまったく同じと思えるかもしれない．しかし，決定的に異なることがある．式 (3) は遠隔力で，何もない空間を通して力が 2 つの電荷間に作用している．一方，式 (4) や式 (5) は近接作用となっており，電荷は場を変化させて，その場の変化が力を生み出していると考える．

電場求めることが静電場の中心的な問題となる．これが分かれば全ての静電場の性質が分かるからである． r' の位置にある電荷 q が r の位置につくる電場 E を求める．これは式 (4) から，直ちに

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6)$$

と得られる．この様子を図 2 にしめす．

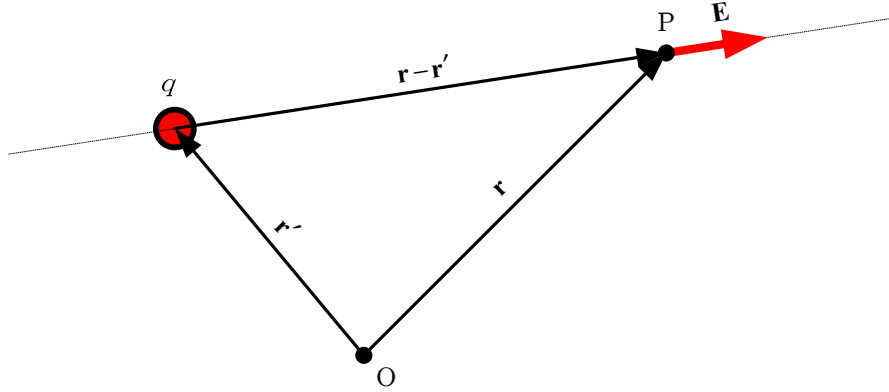


図 2: 電荷が作る電場

電荷が電荷密度 ρ [C/m³] で連続的に分布する場合，位置 $\mathbf{r}$ での電場は，式 (6) より

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (7)$$

となる． $\rho(\mathbf{r}')$ は， $\mathbf{r}'$ での電荷密度と言う意味である．ここでの電荷密度は， $\mathbf{r}'$ の関数であって $\mathbf{r}$ の関数ではない．これに注意して，ベクトル解析の知識を使うと，

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (8)$$

となることが分かる．ここで，積分の変数は $\mathbf{r}'$ であるが，勾配 ∇ は $\mathbf{r}$ を変数とする．この変数の違いには注意が必要である．

式 (8) の両辺の発散を計算する．

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &\quad \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \text{ より } (\delta \text{ 関数のプリントを見よ}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \times \{-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} dV' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \\ &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (9)$$

これで，電場の発散が計算できた．当然，この式の座標変数は $\mathbf{r}$ のみなので，

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10)$$

と書いてもよい． r' がないので，間違えることはない．この式を微分形のガウスの法則と言う．

ベクトル場の微分方程式の片割れが分かった．残りは，回転である．先ほど，同様に一般化されたクーロンの法則の式 (8) の両辺の回転を計算する．式 (8) の両辺の発散を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &\quad \text{ベクトル恒等式 } \nabla \times \nabla \phi = 0 \text{ より} \\ &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

これで，電場の回転が求まった．電場の回転はゼロである．

以上をまとめると，電場を表す微分方程式は，

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0\tag{12}$$

と書ける．

3.2 静磁場の場合

つぎに静磁場 $\mathbf{B}$ を考える．静電場の場合，電場を作るものは電荷であった．それに対して，静磁場の場合の磁荷というものは発見されていない．従って，磁場の発散はつねにゼロである．

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\tag{13}$$

実際に磁場を作るものは電流である．1本の無限に長い直線電流 I が作る磁場は，

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\tag{14}$$

となる．磁場は半径に比例するため，電流を内部に含む閉じた曲線の線積分は

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I\tag{15}$$

となることは以前述べたとおりである．ここの電流 I は積分路の内側である．これが連続的に，密度 $\mathbf{j}$ で分布していると考えと，

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS\tag{16}$$

となる．ここで，ストークスの定理， $\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ の出番である．これを式 (16) の左辺に適用する．すると両辺とも面積分になる．この面積分は任意の領域で成り立つ．したがって，両辺の被積分関数は等しくなくてはならない．すなわち，

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}\tag{17}$$

である．これで，無限に長い直線電流がつくる磁場，正確には磁束密度の回転が得られた．これは直線電流に限らず，くねくねまがる電流でも成り立つ．

以上の結果をまとめると、磁場が満たす方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \qquad (18)$$

となる。

静磁場の微分方程式の導出は静電場に比べて、汚い。静電場の方は教科書から離れて少し理論的に示した。それに対して、静磁場は教科書のとおりとしている。静磁場の方も静電場同様に美しく導き出すことも可能である。ビオ-サバールの法則を出発点として、ベクトル解析とデルタ関数を上手に使う方法である。思い出してほしい、静電場ではクーロンの法則を出発点として、ベクトル解析とデルタ関数を使って、場の方程式を示した。

デルタ関数を使うと直観に頼らなくて済む分、すっきりとした理論展開ができる。しかし、物理的なイメージがわかり難くなる弊害がある。両方を教えるべきと思うが、大変多くの時間が必要となる。

4 電荷保存則と変位電流

今までの話は、静電磁場で時間的に何も変化しない場合を考えてきた。これからは、時間的に電荷や電流が変する場合を考察する。電荷や電流が変化すると電磁場の变化するわけで、その関係を調べることになる。とはいえ、最終的には先の発散や回転の微分方程式に、時間の項を含めるのだけである。

4.1 電荷の保存則

電荷は自然に発生したり消滅することはない—というのが実験事実である。このことは、電荷の総量は時間的に変化しないと言っている。電子と陽電子が衝突して、光になっても、総量は変化していない。この反応の場合、 $+e$ と $-e$ が反応して電荷ゼロの光子ができるので、電荷が消滅したと思うかもしれない。しかしながら、反応前の電荷の総量はゼロで反応後もゼロであり、やはり総量は変化していない。このように電荷が消滅するときには、同じ電荷量で符号が反対のものも同時に消滅するのである。これは電荷の発生の時も同じである。

このようなことから、ある任意の体積中の電荷量が変化するためには、それはその体積を囲んでいる壁を通して電荷の移動が起きなくてはならない。電荷の移動は電流そのものである。したがって、ある任意の体積中の電荷の総量の変化は、その壁を通しての電流の流れの積分に等しくなる。このことから、単位時間あたりの電荷の総量の変化は、壁を通して流れる電流の積分に等しくなる。いつものように、任意体積の外側に向かった法単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると、これらの関係は

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \qquad (19)$$

となる。この式の右辺にいつものようにガウスの定理を使うと、

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \nabla \cdot \mathbf{j} dV \qquad (20)$$

が得られる。この積分が任意の領域で成り立つことと、電荷密度は場所と時間の関数であることを考えると、

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} \qquad (21)$$

となる．これは電荷の保存則を微分方程式で表したものである．この微分方程式は， $\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ と書き，連続の式とも呼ばれる．

4.2 マクスウェルの変位電流

静電場を表す 4 つの式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (24)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (25)$$

から始めることにする．静電磁場の場合，これらの式はまったく矛盾なく成立している．電磁場も電荷も電流もいつでも一定で，場所だけの関数であり，電場および磁場がそれぞれ独立した場として存在している．電場 $\mathbf{E}$ の源は電荷 ρ である．磁場 $\mathbf{B}$ の源は電流 $\mathbf{j}$ である．この場合でも，先ほどの電荷の保存則は成り立つ必要はあるが，時間微分の項はゼロとなるので，

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (26)$$

が成立すれば良い．これに関係するのは，式 (25) だけで，矛盾なく成り立っている．この式の両辺の発散を取ると，左辺は回転の発散で，これは恒等式でゼロとなる¹．

これからは，電磁場と電流および電荷が時間的に変化する場合を考える．まずは，電荷の保存則が成り立つ必要がある．もちろん，時間の変化をゼロとした場合には静電場の式を満足しなくてはならない．それでは，式 (25) の両辺の発散を取ってみよう．この場合，左辺は恒等式でゼロで，右辺は

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (27)$$

となる．今は $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ なので，電荷の保存則を満足しない．そこで，仮に式 (25) の発散が

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \left[\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \quad (28)$$

と書き換えたとする．そうすると，この式は電荷の保存則を満足する．これでも良いが，さすがに式が複雑である．そこで，式 (22) の助けをかりて，少し式を書き換えることを考える．少しばかり変形すると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0 \left[\nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right] \\ &= \mu_0 \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

となる． $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ と $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ を利用すると，これは，

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (30)$$

¹ $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ はベクトル恒等式である．

としても良いだろう．この式を導くとき式 (22) も変動する電磁場でも正しいとした—ことは良いのだろうか?．これまでの議論ではそのよし悪しは分からない．後での議論で矛盾がなく，さらに実験事実として正しいことを言わなくてはならない．結論を言うとこれは正しい．後の議論でも矛盾はないし，実験事実にも反しない．

式 (30) は良さそうであるが，式 (22) もまた，電荷保存則を満足する必要がある．そこで，この式の時間微分を考える．時間微分を取り，左辺と右辺を入れ替えると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \\
 &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\
 &\quad \text{式 (30) を用いると} \\
 &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}) \\
 &= -\nabla \cdot \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{31}$$

となる．これは，電荷保存則そのものである．従って，式 (30) のようにすると，式 (22) はそのまま電荷保存則を満足している．これでめでたし，めでたしである．

式 (30) の追加された項， $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ は変位電流あるいは電束電流と呼ばれ，天才マクスウェルが導入したのである．

5 ファラデーの電磁誘導の法則

電荷保存の法則を満たすようにできたが，電磁場の時間変化をちゃんと記述する式には不十分である．磁場が変化したとき電場が発生する電磁誘導の法則を加えなくてはならない．以下，そのことについて述べる．

5.1 電磁誘導 (積分形)

エルステッドは電流が磁場を作ることを見出した．このことを聞いたファラデーは磁場が電流をつくると考え実験を行った．正確ではないが，図 3 のような回路で実験をした．まずは，閉回路 A に電流を流すと，鉄心の中に磁場が発生する．そして，最初，ファラデーは閉回路 B に電流が流れると考えた．しかし，期待とは裏腹に電流は流れなかった．いろいろ実験をしているうちに，閉回路 A のスイッチを ON や OFF した瞬間に，電流が流れることに気づいた．

閉回路 B に電流が流れるのは，オームの法則により回路内に電圧が発生するからである．この電圧を誘導起電力といい，それは回路を貫く磁束 ϕ の時間的な変化に比例する．そして，その符号は，誘導起電力によって発生した誘導電流による磁束が回路を貫く磁束の変化を妨げるようになる．これを Lenz の法則という．もっと簡単に Lenz の法則を述べると，

- もし，回路内の磁束が増加するように外部から磁場を与えると，その回路内の磁束を減少するように誘導電流が流れる．

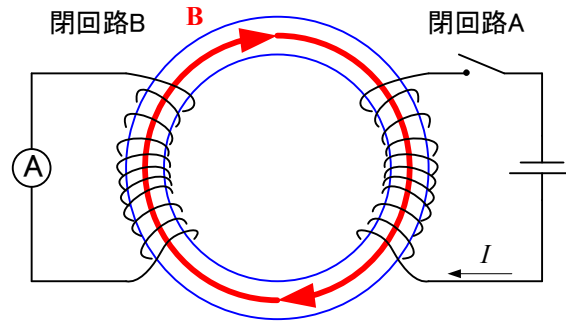


図 3: ファラデーの電磁誘導の実験

- もし，回路内の磁束が減少するように外部から磁場を与えると，その回路内の磁束を増加するように誘導電流が流れる．

である．要するに，誘導電流は回路のトータルの磁束の変化を妨げるのである．これは，誘導起電力 $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ とすると

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}\quad (32)$$

と記述出来る．

ファラデーは閉回路 B がなくても，閉回路 A は電場を作ると考えた．この考えを単純にすると，図 4 のようになる．もっと単純化すると，閉回路 A がなくても，磁場が変化すれば電場ができると考えることもできる (図 5)．これは，最初の実験からかなり飛躍しているが，さまざまな検証の結果正しいと言っている．したがって，式 (32) は導体がある閉じた回路ではなく一般的な電磁場について成り立つことになる．電磁場のみに記述すると，

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS\quad (33)$$

となる．これが積分形の Faraday の法則である．

5.2 微分形のファラデーの法則

今まで学習してきたとおり，積分形は物理量を求める場合には都合がよいが，理論的な取り扱いには不便である．そこで，先ほどの積分形の Faraday の法則である式 (33) を微分形に直しておく．そのためには，いつものストークスの定理 $\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ を使えばよい．式 (33) の左辺にストークスの定理を適用し，右辺の時間微分を積分の中に入れて，

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS\quad (34)$$

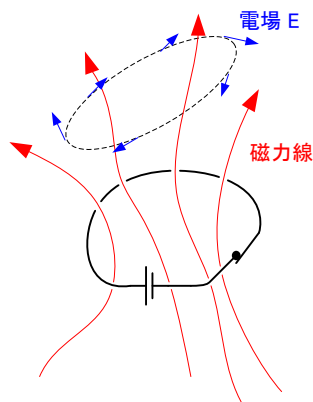


図 4: 電流の変化が磁場の变化を引き起こし，それが電場を作る．

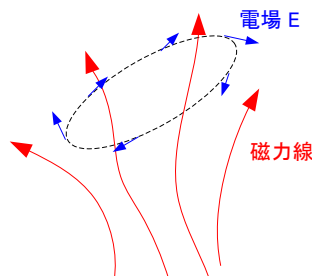


図 5: 磁場の变化が電場を作る．

となる．この積分は，いつでも，どこでも，どんな領域でも成り立つ．これが成り立つためには，左右の被積分関数が等しくなくてはならない．すなわち，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (35)$$

である．これが微分形の電磁誘導の法則である．

もちろん，この式には電荷密度 ρ や電流密度 j は関係していないので，電荷保存の法則を書き換えることはない．

6 マクスウェルの方程式

ここでは，静電場を記述する式から出発し，電荷保存則と Faraday の電磁誘導の法則が成り立つように，電磁場の発散と回転の式を拡張した．これにより，電磁場 $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H})$ 及び，電荷密度 ρ と電流密度 j の全ての変数が時間の項を含ませることができる．他に法則はなく，これだけである．全て書き出すと，

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (37)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (38)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (39)$$

となる．ただし，電磁場がある媒質の性質を決める誘電率 ε と透磁率 μ をとおして，

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (40)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (41)$$

の関係がある．

もう一度言うが，全ての変数は位置 r と時間 t の関数となっている．これが電磁場を記述する完全な方程式である．これが計算できれば全ての電磁気の問題は解けることになる．

7 課題

[問題 1] 教科書 p.97-98 の練習問題 (1)-(3)

7.1 レポート 提出要領

提出方法は，次の通りとする．

期限	7 月 13 日 (木)AM8:45 まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト，または講義開始時に手渡し
表紙	表紙を 1 枚つけて，以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電磁気学特論」 課題名「課題 時間的に変化する電場と磁場」 生産システム工学専攻 学籍番号 氏名 提出日
内容	問題の解答，計算課程をきちんと書くこと．

参考文献