学年末試験問題 (5E 計算機応用)

電気工学科　　学籍番号　　　　氏名

1　補間法

[問 1] $\boxed{\textit{10}\ 点}$

xy 座標上にある $N+1$ 個のデータがあるとする．すると，N 次関数であれば全てのデータ点を通る曲線を描くことができる．このように $N+1$ 個の (x_i, y_i) というデータの間は N 次関数で補間できる．このようにして補間する方法ラグランジュ補間といい，すべてのデータ点を通るのが特徴である．

[問 2] $\boxed{\textit{10}\ 点}$

$N+1$ 個のデータがある場合のラグランジュ補間は次のようになる．

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_N)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_N)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_N)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_N)}y_1 \tag{1}$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_N)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_N)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_N)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_3-x_N)}y_3 \tag{2}$$

$$\cdots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_N)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_N)}y_k + \cdots \tag{3}$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{N-1})}{(x_N-x_0)(x_N-x_1)(x_N-x_2)\cdots(x_N-x_{N-1})}y_N$$

ここで，$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_N, y_N)$ は $N+1$ のデータ点を表す．

ラグランジュ補間の特徴は，(1)$N+1$ のデータが N 次関数で補間していること，(2) 全てのデータ点を通ることである．この式が，これらの特徴を満たしていることは，以下より分かる．

1. この式の全ての項の分母は定数である．そして，全ての項の分子は x の N 次関数になっている．したがって，この式は $N+1$ の全てのデータ点によって構成される N 次関数である．これは，ラグランジュ補間の最初の特徴である．
2. 明らかに，$x = x_0$ とすれば $y = y_0$ である．したがって，ここでに示した式は (x_0, y_0) を通ることがわかる．同じようなことが，$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N)$ についても成り立つ．ゆえに，この式が示す曲線は全てのデータ点を通ることになり，ラグランジュ補間の 2 番目の特徴を満たしていると言える．

[問 3] $\boxed{\textit{10}\ 点}$

前問で示した式に，問題の値を代入すると，次のようになる．

$$\begin{aligned} y = &-3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)}3 - 2\frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} + 0\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} \\ &-\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} \end{aligned} \tag{4}$$

これがラグランジュ補間の式である．

2　積分法

[問 1] $\boxed{\textit{15 点}}$

定積分,

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

の近似値を数値計算で求めることを考える．積分の計算は面積の計算であるから，図 1 のように台形の面積の和を求めることにより，積分の近似値が分かる．積分の範囲 $[a, b]$ を N 等分した台形で近似した面積 T は,

$$\begin{aligned} T &= h\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + h\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + h\frac{f(a+2h)+f(a+3h)}{2} + \cdots \\ &\qquad + h\frac{f(a+(N-1)h)+f(a+Nh)}{2} \\ &= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[f(a+jh)+f(a+(j+1)h)\right] \end{aligned}$$

となる．これが数値積分の台形公式である．

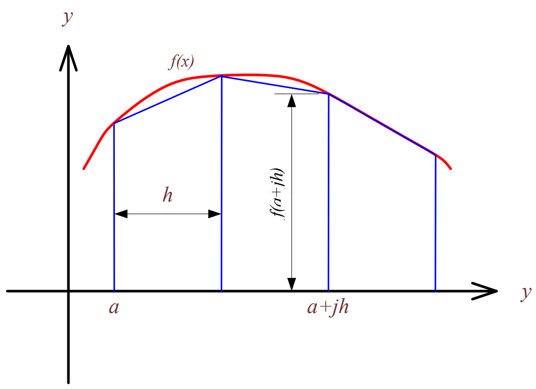

図 1: 積分と台形の面積の比較

[問 2] $\boxed{\textit{15 点}}$

モンテカルロ積分は乱数を使い積分の値を求める方法である．例えば，関数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdot, x_M)$ の体積分を考える．この体積分は

$$\int_\Omega f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_M)dx_1 dx_2 dx_3 \cdots dx_M = V_\Omega \langle f \rangle \tag{5}$$

と書くことができる．ここで，V は M 次元体の領域 Ω の体積，$\langle f \rangle$ はその内部の関数の平均値である．モンテカルロ積分では，この右辺の体積と関数の平均値を乱数を使って求める

体積は計算が容易な単純な形状の内部に，領域 Ω を包み込み，その内部にランダムに配置されたサンプル点の数を数えれば良いのである．単純な形状内部に配置されたランダムな点の数を N とする．そして，その内部にある積分領域 Ω に含まれる点の数を N_Ω とする．さらに，単純な形状の体積を V_r，領域 Ω のそれを V_Ω とすると,

$$V_\Omega \simeq \frac{N_\Omega}{N} V_r \tag{6}$$

の関係がある．右辺はコンピューターにより容易に計算できる．ランダムな点の数 N が多くなればなるほど，近似の精度は良くなる．

平均値は領域 Ω のサンプル点の平均値なので，容易に計算できる．

3　偏微分方程式

[問 1] $\boxed{\textit{10 点}}$

波の速度が 1 の一次元波動方程式は，次のようになる．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ここで，u が波の振幅，x が位置，t が時刻である．

[問 2] $\boxed{\textit{20 点}}$

x 方向の微小変位を Δx，時間軸方向の微小変位を Δt とし，解 $u(x,t)$ をテイラー展開する．

$$u(x+\Delta x,t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4 + \cdots$$
$$u(x-\Delta x,t) = u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4 - \cdots$$

これらの式の辺々を足し合わせると，

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x,t} = \frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right] - O(\Delta x^2)$$

が得られる．このことから，2 階の偏導関数の値は微小変位 Δx の場所の関数の値を用いて，$(\Delta x)^2$ の精度で近似計算ができることが分かる．同様なことを時間軸方向についても行うと

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x,t} = \frac{1}{\Delta t^2}\left[u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)\right] - O(\Delta t^2)$$

が得られる．

これらの式を 2 次の微小量を無視して，元の波動方程式に代入すれば，

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right] = \frac{1}{\Delta t^2}\left[u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)\right]$$

となる．これが，1 次元波動方程式の差分の式である．

[問 3] $\boxed{\textit{10 点}}$

前問で示した差分の式を計算し易いように，

$$u(x,t+\Delta t) = 2u(x,t) - u(x,t-\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,y)\right]$$

と変形する．この式の右辺は，時刻 t と $t-\Delta t$ の値でである．そして，左辺は時刻 $t+\Delta t$ の値である．したがって，この式を使うと，時刻 t と $t-\Delta t$ の値から，$t+\Delta t$ の値が計算できることになる．

この式の示す通り，コンピューターの数値計算では右辺を計算して，次の時刻の波の情報を得る．これを繰り返せば，初期の波の形からある任意の時刻の波の形を計算することができる．これが波動方程式を差分で数値計算する方法である．