常微分方程式を数値計算する練習

山本昌志*

2006年10月2日

1 ここでの学習内容

1階の常微分方程式を本日でマスターする．オイラー法と2次および4次のルンゲ・クッタ法で，簡単な回路の微分方程式を計算し，誤差を比較する．

2 簡単な回路の問題

2.1 CR 直列回路

ここでは，常微分方程式の数値計算の練習問題として，図1に示すCR直列回路に流れる電流を求める．回路の問題なので，キルヒホッフの法則—-回路の電圧を一周に渡って積分するとゼロ—を使うのがセオリーで，それは

$$\frac{Q}{C}+IR-V_0\sin(\omega t)=0 \tag{1}$$

となる．電荷 Q と電流の流れる方向は，図の通りである．このようにすると電流と電荷の関係は，

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=I \tag{2}$$

となる．Q の定義を逆にすると，電荷と電流の関係に負号が付くことを忘れてはならない．そして，式(1)も負号が付く．この辺はなかなか分かり難いが，良く勉強しなくてはならない．今は回路の授業でないので詳細は述べないが，おもしろい内容が含まれる．

式(1)を時間で微分して，電流と電荷の関係を用いると，

$$\frac{I}{C}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-\omega V_0\cos(\omega t)=0 \qquad\qquad I(0)=0 \tag{3}$$

という微分方程式が得られる．時刻が $t=0$ の時，電流がゼロという初期条件を課している．幸いなことに，この微分方程式には厳密解があり，それは

$$I(t)=\frac{V_0\omega C\left[\cos(\omega t)+R\omega C\sin(\omega t)-e^{-\frac{t}{CR}}\right]}{1+(R\omega C)^2} \tag{4}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

となる．ちょっとだけ面倒な式になっているが，気にすることはない．諸君は，複素関数を使って，$t \to \infty$ のときの状態—定常状態—を別な方法で解くことができるであろう．それができれば十分である．ただ，過渡状態を見たい場合は，このようにちゃんと微分方程式を計算しなくてはならない．この微分方程式はたまたま解析解があったが，普通はこんなに都合はよくない．そういうときには，数値計算を使う必要がある．

今回の回路の問題では厳密解はあるが，練習を兼ねて数値計算で微分方程式を解いてみよう．

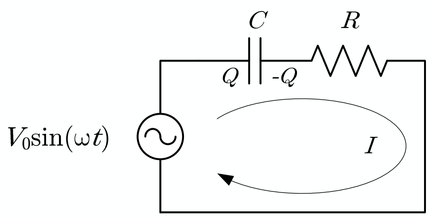

図 1: CR 回路

2.2 数値計算

回路に流れる電流を時刻 $0 \leqq t \leqq 1$ の間，オイラー法とホイン法 (2 次のルンゲクッタ法)，4 次のルンゲクッタ法で計算せよ．時刻と電流の値は，次のようにテキストファイルに書き出すこと．第 1 列:時刻，第 2 列:厳密解，第 3 列:オイラー法，第 4 列:ホイン法，第 5 列:4 次のルンゲ・クッタ法．

```
0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
1.000000e-04 1.985456e-04 3.141593e-04 1.570021e-04 1.963076e-04
2.000000e-04 2.713744e-04 3.140042e-04 2.352707e-04 2.697098e-04
3.000000e-04 2.977589e-04 3.135393e-04 2.740179e-04 2.968290e-04
4.000000e-04 3.068621e-04 3.127650e-04 2.928500e-04 3.063989e-04
5.000000e-04 3.094132e-04 3.116820e-04 3.015707e-04 3.091954e-04
6.000000e-04 3.093600e-04 3.102914e-04 3.050827e-04 3.092600e-04
7.000000e-04 3.081557e-04 3.085946e-04 3.058380e-04 3.081095e-04
```

長いので，この辺は省略

```
9.995000e-01 3.084431e-04 3.085946e-04 3.082924e-04 3.084380e-04
9.996000e-01 3.101389e-04 3.102914e-04 3.099872e-04 3.101339e-04
9.997000e-01 3.115287e-04 3.116820e-04 3.113761e-04 3.115236e-04
9.998000e-01 3.126111e-04 3.127650e-04 3.124577e-04 3.126060e-04
9.999000e-01 3.133849e-04 3.135393e-04 3.132310e-04 3.133798e-04
1.000000e+00 3.138495e-04 3.140042e-04 3.136951e-04 3.138444e-04
```

さらに，厳密解との差—誤差—の絶対値のファイルも作成すること．第 1 列:時刻，第 2 列:オイラー法の誤差，第 3 列:ホイン法の誤差，第 4 列:4 次のルンゲ・クッタ法の誤差．C と R の値をいろいろ計算してみよう．計算後さがどのようになるか調べてみよう．

```
1.000000e-04 1.156137e-04 4.154344e-05 2.238011e-06
2.000000e-04 4.262985e-05 3.610366e-05 1.664613e-06
3.000000e-04 1.578046e-05 2.374101e-05 9.298990e-07
4.000000e-04 5.902889e-06 1.401218e-05 4.631933e-07
5.000000e-04 2.268803e-06 7.842526e-06 2.178372e-07
6.000000e-04 9.314720e-07 4.277303e-06 9.994238e-08
7.000000e-04 4.389742e-07 2.317686e-06 4.619756e-08
```

長いので，この辺は省略

```
9.992000e-01 1.478607e-07 1.467147e-07 4.904329e-09
9.993000e-01 1.492431e-07 1.481930e-07 4.952495e-09
9.994000e-01 1.504783e-07 1.495250e-07 4.995773e-09
9.995000e-01 1.515650e-07 1.507095e-07 5.034120e-09
9.996000e-01 1.525021e-07 1.517453e-07 5.067500e-09
9.997000e-01 1.532887e-07 1.526313e-07 5.095879e-09
9.998000e-01 1.539240e-07 1.533666e-07 5.119229e-09
9.999000e-01 1.544074e-07 1.539507e-07 5.137526e-09
1.000000e+00 1.547384e-07 1.543828e-07 5.150754e-09
```