学年末試験解答用紙 (3E 電気数学)

2007 年 3 月 1 日　　電気情報工学科　　学籍番号　　　　氏名

1　基礎とパーセバルの等式

1.1　オイラーの公式

[問 1] $\boxed{5\text{点}}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

[問 2] $\boxed{5\text{点}}$

オイラーの公式より,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{2}$$

となる．最初の公式に $x \to -x$ とすると 2 番目の式が得られる．これらの式から,

$$\frac{\text{式}\,(1) + \text{式}\,(2)}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\frac{\text{式}\,(1) - \text{式}\,(2)}{2i} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

と $\sin x$ と $\cos x$ を表すことができる．

1.2　パーセバルの等式

[問 1] $\boxed{10\text{点}}$

問題文で与えられた式 (1) の両辺に $f(x)$ を乗じて区間 $[L,\, L]$ で積分を行う．

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \;\mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-L}^{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\right] \\
&\qquad \text{問題文の式 (2) と式 (3) の } a_n \text{ と } b_n \text{ の計算式により} \\
&= L\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(L a_n^2 + L b_n^2\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

これから，パーセバルの等式,

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \;\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{4}$$

が得られる．

2　フーリエ変換の応用

[問 1] $\boxed{\textit{10}\ 点}$

問題文で与えられたフーリエ変換の定義の式 (4) に導関数を代入し，部分積分を行うと，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}$$

が得られる．問題文から，$\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}f(t)=0$ なので，式の右辺の第一項はゼロとなる．したがって，導関数のフーリエ変換は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t&=\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=i\omega F(\omega)\end{aligned}$$

となる．

[問 2] $\boxed{\textit{10}\ 点}$

先ほどと同じように，問題文で与えられたフーリエ変換の定義の式 (4) に 2 階の導関数を代入し，部分積分を行うと，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(f)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}$$

が得られる．$\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}f(t)=0$ から，$f'(-\infty)=f'(\infty)=0$ である．これから，右辺第一項はゼロとなる．右辺第二項は導関数のフーリエ変換となっており，先ほど求めた導関数のフーリエ変換が使える．したがって，二階の導関数のフーリエ変換は，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=(i\omega)^2F(\omega)$$

となる．

[問 3] $\boxed{\textit{20}\ 点}$

問題文の回路の電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t)+\frac{Q(t)}{C}+L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{5}$$

である．両辺を時間 t で微分し，$\mathrm{d}Q(t)/\,\mathrm{d}t=I(t)$ を使うと，

$$-\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{I(t)}{C}+L\frac{\mathrm{d}^2I(t)}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{6}$$

が得られる．両辺をフーリエ変換すると，

$$-i\omega\tilde{V}(\omega)+\frac{\tilde{I}(\omega)}{C}+(i\omega)^2L\tilde{I}(\omega)=0 \tag{7}$$

がえられる．これを整理すると，

$$i\omega\tilde{V}(\omega)=\left[\frac{1}{C}+(i\omega)^2L\right]\tilde{I}(\omega) \tag{8}$$

となる．これから，電源からみた回路のインピーダンスは，

$$\begin{aligned}Z(\omega)&=\frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)}\\&=\frac{1}{i\omega C}+i\omega L\\&=i\omega L-\frac{i}{\omega C}\end{aligned} \tag{9}$$

となる．

3 波動方程式

[問 1] $\boxed{\textit{10 点}}$

問題文の波動方程式の解を，

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

とそれぞれの変数の関数の積の形になると仮定する．この仮定した解を元の偏微分方程式に代入すると，

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

が得られる．これは，

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

となる．この左辺は時刻 t のみの関数で，右辺は場所 x のみの関数である．これが等しいということは，両辺の値は定数でなくてはならない．この定数を $-\lambda$ とすると，

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

となる．これを整理すると，問題文で与えられた波動方程式を表す連立微分方程式

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \end{aligned}$$

が得られる．

[問 2] $\boxed{\textit{20 点}}$

弦は両端で固定されている．固定されている部分では，弦の変位 $y(x,t)$ はゼロである．したがって，

$$X(0,t) = 0 \qquad\qquad X(L,t) = 0$$

である．この境界条件を満たすことができる $X(x)$ に関する常微分方程式の解は，

$$X(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad\qquad \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

である．これから，時刻の項の常微分方程式は，

$$T'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T = 0$$

となる．$(n\pi c/L)^2$ は正の実数であるので，一般解は

$$T(t) = a_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{L}$$

となる．空間および時刻の常微分方程式から得られた解を元の仮定した解に代入すると

$$y_n(x,t) = C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L}$$

が得られる．元の波動方程式は線形なので，重ね合わせの原理が成り立つ．これから，弦の振動を表す波動方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_n y_n(x,t) \\ &= \sum_n \left(C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L} \right) \end{aligned}$$

と書き表すことができる．

［問 3］ 10 点

問題で与えられた弦の条件より，前問の C_n と D_n を解けば弦の振動を表す式が得られたことになる．初期条件により，弦の初速度 $v(x)$ はゼロである．これを式で表すと，

$$\begin{aligned} v(x) &= \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} \\ &= \sum_n D_n \frac{n\pi c}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．これから，$D_n = 0$ が分かる．C_n は $t = 0$ のときの弦の形から計算できる．$D_n = 0$ として，先に求めた弦の振動の一般解の $t = 0$ は，

$$y(x,0) = \sum_n C_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

となる．C_n はフーリエ級数の係数に他ならないので，問題文の式 (3) を使ってその値を求めることができる．

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \alpha x \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} \alpha(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{L}\left[-\alpha x\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} + \frac{2\alpha}{L}\int_0^{L/2}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{2}{L}\left[-\alpha(L-x)\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} - \frac{2\alpha}{L}\int_{L/2}^{L}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\alpha L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2\alpha}{L}\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} + \frac{\alpha L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2\alpha}{L}\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} \\ &= \frac{4\alpha}{L}\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4\alpha L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

$D_n = 0$ なので，弦の振動は，

$$y(x,t) = \sum_n \frac{4\alpha L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}$$

となる．$\sin(n\pi/2)$ の項は n が偶数の場合ゼロとなる．したがって，n は奇数のみを加算すればよい．すると，

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{N=1}^{\infty}\frac{4\alpha L}{(2N-1)^2\pi^2}(-1)^{N-1}\sin\frac{(2N-1)\pi x}{L}\cos\frac{(2N-1)\pi ct}{L} \\ &= \sum_{N=1}^{\infty}\frac{(-1)^{N-1}4\alpha L}{(2N-1)^2\pi^2}\sin\frac{(2N-1)\pi x}{L}\cos\frac{(2N-1)\pi ct}{L} \end{aligned}$$

となる．これが問題により与えられた弦の振動を表す式である．