後期中間試験へむけて (フーリエ級数)

山本昌志*

2006 年 11 月 28 日

概 要

後期中間試験の範囲をまとめる．学生諸君は，この内容を理解して試験に臨まなくてはならない．

1　中間試験の内容

試験範囲は，教科書 [1] の p.222–231 の第一行目の式まである．第 4 回– 第 8 回の講義内容から出題する．第 1 回–第 3 回の講義からは直接出題しない．

この間に学習した内容は以下の通りで，試験ではこれらの理解度を確認する．

- 周期関数のフーリエ級数
- 有限区間で定義された関数のフーリエ級数
- 最良近似としてのフーリエ級数
- 複素フーリエ級数

2　周期関数のフーリエ級数

2.1　周期 2π の場合

2.1.1　三角関数の直交性

関数の集まり $\{\phi_1(x),\,\phi_2(x),\,\phi_2(x),\,\cdots\}$ があるとき，

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} > 0 & (m=n) \\ = 0 & (m\neq n) \end{cases} \tag{1}$$

のとき，$\phi_m(x)$ を区間 $[a,\,b]$ での直交関数系と言う．あたかもベクトル $\{\boldsymbol{A}_1,\,\boldsymbol{A}_2,\,\boldsymbol{A}_3,\,\cdots\}$ が直交しているのと同じ．ベクトルの内積の演算が，関数では積分になる．

フーリエ級数は，関数の集まり[1] $\{1,\,\cos x,\,\cos 2x,\,\cos 3x,\,\cdots,\,\sin x,\,\sin 2x,\,\sin 3x,\,\cdots\}$ で周期関数を表したものである．これらの関数が直交関数系になることを示す．フーリエ係数を計算する場合，この直交関係が重要になる．それを証明するために，次の順序で式 (1) の積分を行う．

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

[1] 展開の関数の集合を基底関数と呼ぶ．

1. コサイン (余弦関数) 間の直交関係
2. サイン (正弦関数) 間の直交関係
3. コサインとサインの間の直交関係
4. 定数関数 1 とコサインとの直交関係
5. 定数関数 1 とサインの直交関係

それでは直交関数系と成っていることを示そう．m と n を自然数として，最初にコサイン同士の積分の計算を行う．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)\left(\frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(n+m)x}+e^{-i(n+m)x}+e^{i(n-m)x}+e^{-i(n-m)x}}{4} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\right] \mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}+x\right]_{-\pi}^{\pi} & (n=m) \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}+\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n\neq m) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi & (n=m) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2}
$$

同じことをサインの積に対して行う．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)\left(\frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(n+m)x}-e^{-i(n+m)x}-e^{i(n-m)x}+e^{-i(n-m)x}}{-4} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(n+m)x-\cos(n-m)x\right] \mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}-x\right]_{-\pi}^{\pi} & (n=m) \\ -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}-\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} & (n\neq m) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi & (n=m) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases}
\end{aligned} \tag{3}
$$

が得られる．サインとコサインの積は簡単で，$\sin nx$ は奇関数，$\cos mx$ は偶関数である．その積は奇関数となる．したがって，

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x = 0 \tag{4}
$$

となる．最後に，定数関数 1 と $\sin nx$，$\cos nx$ の積分をおこなう．

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x = 0 \tag{5}
$$

以上より，任意の関数 $f(x)$ をフーリエ級数で展開するときの関数の集合

$$\{1,\, \cos x,\, \cos 2x,\, \cos 3x,\, \cdots,\, \sin x,\, \sin 2x,\, \sin 3x,\, \cdots\}$$

は直交関数系となっていることが分かる．

2.1.2 フーリエ係数の計算

周期 2π の関数 $f(x)$ は，次のように三角関数の和で表すことができる．

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \tag{6}$$

これをフーリエ級数 (Fourier series) と言い，自然現象の解析に大変役立つものである．三角関数の係数 a_n と b_n は，三角関数の成分の大きさを表す．a_n と b_n は次のようにして求めることができる．

a_0 の計算　式 (6) の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分を行う．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x \right\}$$

式 (5) を使うと

$$= a_0 \pi \tag{7}$$

これより，

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

となり，a_0 を求めることができる．

この式をよく見ると，$a_0/2$ は $f(x)$ の平均値となっている．電気回路では，この平均値のことを直流成分と言う．

a_n の計算　式 (6) の両辺に $\cos mx$ を乗じて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分を行う— ことにより，コサインの係数の a_n を求める．ただし，m は自然数とする．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,\mathrm{d}x \right\}$$

式 (5) と (2)，(4) を使うと

$$= a_m \pi \tag{9}$$

これより，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

を計算することにより，a_n を求めることができる．ここで，$n = 0$ の場合を考える．そうすると，式 (8) と同一の式が得られる．したがって，式 (8) は式 (10) に吸収され，不要となる．これが，フーリエ級数の最初の項を a_0 としないで，$a_0/2$ とした理由である．

b_n 計算　つぎに，式 (6) の両辺に $\sin mx$ を乗じて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分を行う．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x\right\}$$

式 (5) と (4)，(3) を使うと

$$= b_m\pi \tag{11}$$

これより，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

を計算することにより，b_n を求めることができる．

2.1.3　具体的な周期関数

試験を受けるに際して，次のような周期関数をフーリエ級数で表せるようになること．

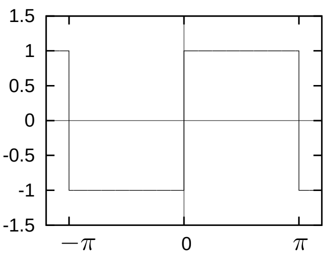

図 1: 周期 2π の矩形波

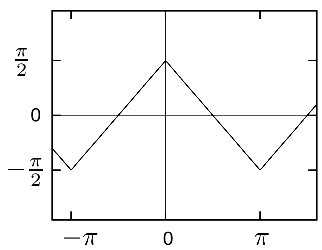

図 2: 周期 2π の三角波

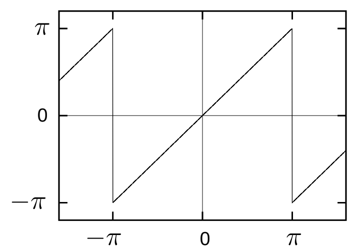

図 3: 周期 2π ののこぎり波

2.2　周期 $2L$ の場合

全く同じ議論が，周期 $2L$ の関数 $g(x)$ についても成り立つ．ただし，展開する関数の集合—基底関数—は，

$$\{1, \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \cos\frac{3\pi x}{L}, \cdots, \sin\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \sin\frac{3\pi x}{L}, \cdots\}$$

となる．このような関数で展開する場合，$g(x)$ は

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos\frac{3\pi x}{L} + \cdots + b_1 \sin\frac{\pi x}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin\frac{3\pi x}{L} + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) \qquad (13) \\
&\text{ただし，}\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\,(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\,(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となる．これが，任意の周期 $2L$ をもつ関数のフーリエ級数である．

2.3 周期 T の場合

電気の問題でフーリエ級数を使う場合，横軸は x ではなく，時間軸 t の場合が多い．そして，周期は $2L$ ではなく，T である．次の関係

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (14)$$

に気を付けて，$2L \to T$ とする．この場合，展開する関数の集合—基底関数—は，

$$\{1, \cos\omega t, \cos 2\omega t, \cos 3\omega t, \cdots, \sin\omega t, \sin 2\omega t, \sin 3\omega t, \cdots\}$$

となる．周期 T の関数 $h(t)$ は，

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \qquad (15) \\
&\text{ただし，}\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h\,(x) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h\,(x) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

となる．

一般には，$\cos\omega t$ や $\sin\omega t$ を基本波と呼び，$2 \leqq n$ の場合の $\cos n\omega t$ や $\sin n\omega t$ を高調波と呼ぶ．

2.4 偶関数と奇関数

偶関数や奇関数といった対称性を考えると，より次の積分の関係も得られる．

$$\int_{-a}^{a} \text{偶関数}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} \text{偶関数}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-a}^{a} \text{奇関数}\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (16)$$

この対称性を使うと，以下の結果が得られる．

- 周期関数 $f(x)$ が偶関数の場合

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{17}$$
$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$$

これをフーリエ余弦級数と呼ぶ．

- 周期関数 $f(x)$ が奇関数の場合

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{18}$$
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$$

これをフーリエ正弦級数と呼ぶ．

3 有限区間で定義された関数のフーリエ級数

ここでは，ある区間で定義された関数をフーリエ級数で取り扱うことを考える．これまで取り扱ってきた関数は，定義域 $[-\infty, \infty]$ の周期関数であった．ここでは，定義域 $[0, \pi]$ や $[0, L]$ の有限な区間の関数を取り扱う．この範囲の外側は興味の対象外となり，その値はどうでもよい．

3.1 区間 $[0, \pi]$ で定義された関数

3.1.1 余弦フーリエ級数

区間 $[0, \pi]$ で定義された関 $f(x)$ がある．これをフーリエ級数で表すことを考える．そのため，$[-\pi, \pi]$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le L) \\ f(-x) & (-L \le x \le 0) \end{cases} \tag{19}$$

となり，周期 2π をもつ偶関数 $F(x)$ を考える．すると，フーリエ級数で表すことができる．すなわち，区間 $[0, \pi]$ で $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x + a_3 \cos 3\pi x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \qquad (20) \\ & \text{ただし，} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos n\pi x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

と表すことができる．これを余弦フーリエ級数と言い，$[0,\, L]$ では元の関数 $f(x)$ を正しく表している．これは，区間 $[0,\, \pi]$ の場合，

$$\{1,\, \cos x,\, \cos 2x,\, \cos 3x,\, \cos 4x,\, \cos 5x,\, \cos 6x,\, \cdots\}$$

を基底関数に選んで展開できる．

3.1.2　正弦フーリエ級数

一方，$[-\pi,\, \pi]$ で定義された奇関数 $G(x)$ として

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq \pi) \\ -f(-x) & (-\pi \leq x \leq 0) \end{cases} \tag{21}$$

を考えることもできる．$G(x)$ は奇関数なので，区間 $[0,\, \pi]$ で $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1 \sin \pi x + b_2 \sin 2\pi x + b_3 \sin 3\pi x + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \\ &\qquad \text{ただし，} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin n\pi x \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{22}$$

と表すこともできる．これを正弦フーリエ級数と言う．区間 $[0,\, \pi]$ の場合，

$$\{\sin x,\, \sin 2x,\, \sin 3x,\, \sin 4x,\, \sin 5x,\, \sin 6x,\, \cdots\}$$

も基底関数に選んで展開できる．

3.2　区間 $[0,\, L]$ で定義された関数

同様に，$[0,\, L]$ で定義された関数 $f(x)$ もまた，正弦フーリエ級数や余弦フーリエ級数に展開できる．余弦フーリエ級数は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos \frac{3\pi x}{L} + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \\ &\qquad \text{ただし，} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{23}$$

となる．一方，正弦フーリエ級数は，

$$\begin{aligned} f(x) &= b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &\qquad \text{ただし，} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{24}$$

となる．

3.2.1　具体的な関数

試験を受けるに際して，次のような関数を余弦フーリエ級数や正弦フーリエ級数で表せるようになること．特に，図 5 の余弦フーリエ級数は，全波整流の問題を考えるときに重要である．

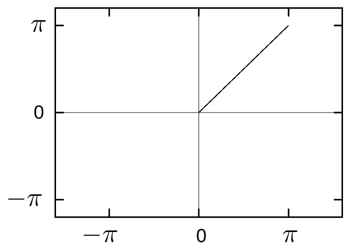

図 4: $y = x$ の関数

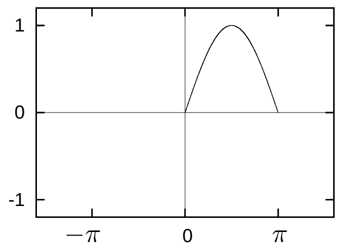

図 5: $y = \sin(x)$ の関数

4　最良近似としてのフーリエ級数

フーリエ級数とは全く話を別にして，区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ を三角関数を用いて最小二乗法で近似する．すなわち，

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{25}$$

と近似する．ここで，式 (25) の係数 a_k と b_k を上手に選んで，$f(x)$ との二乗平均差[2]

$$E(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 \, \mathrm{d}x \tag{26}$$

が最も小さくなるようにする．この二乗平均誤差は，係数 a_k や b_k の関数となっている．この係数の選び方により，誤差の量が変化する．

二乗平均誤差を最小にするためには，それぞれの偏微分がゼロになるときに得られる．すなわち，

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0 \qquad \cdots \qquad \frac{\partial E}{\partial a_n} = 0 \tag{27a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_1} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial b_2} = 0 \qquad \cdots \qquad \frac{\partial E}{\partial b_n} = 0 \tag{27b}$$

が条件となる．この具体的な計算は，式 (26) に式 (25) を代入して偏微分がゼロとなる a_k や b_k を求める．

[2]区間 $[a, b]$ の $f(x)$ の平均は，$<$ 平均 $>= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ となる．

a_0 の計算　二乗平均後差が最小になる a_0 は，次のように計算して求める．

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial E}{\partial a_0}\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left\{f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)\right]\right\}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

式 (5) より $\sin kx$ と $\cos kx$ の積分はゼロとなるので，

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x) - \frac{a_0}{2}\right\}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{a_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{a_0}{2} \qquad (28)\end{aligned}$$

である．ゆえに，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (29)$$

となる．これは，フーリエ級数の a_0 の計算と同じ．

a_k の計算　二乗平均後差が最小になる ℓ 番目の係数 a_ℓ を計算する

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial E}{\partial a_\ell}\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left\{f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)\right]\right\}\cos \ell x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

式 (5)(2)(4) を使うと，

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \ell x\,\mathrm{d}x + \frac{a_\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos \ell x \cos \ell x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \ell x\,\mathrm{d}x + a_\ell \qquad (30)\end{aligned}$$

したがって，

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \qquad (31)$$

である．これもフーリエ係数の計算と同じ

b_k の計算　同様にし，二乗平均後差が最小になる ℓ 番めの係数 b_ℓ を計算する

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial E}{\partial b_\ell}\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left\{f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)\right]\right\}\sin \ell x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

式 (5)(3)(4) を使うと，

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \ell x \,\mathrm{d}x + \frac{b_\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin \ell x \sin \ell x \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \ell x \,\mathrm{d}x + b_\ell
\end{aligned} \tag{32}$$

したがって，

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x \tag{33}$$

である．これもフーリエ係数の計算と同じ．

フーリエ級数は，関数 $f(x)$ を最小二乗法で近似している．これは，展開する三角関数が有限個の場合でも，その展開の項数に関わらずいつも最良近似となっている．展開の項数に関わらず，同じ係数でいつでも最良近似となるのは，展開する三角関数の集合が直交関数系となっているからである．

5 複素フーリエ級数

三角関数の計算は厄介なので，指数関数を使った方が便利なことが多い．そこで，複素数の指数関数を使ったフーリエ級数を考える．

5.1 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数

ここでは，オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{34}$$

が重要な役割を果たす．これから

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{35}$$

を直ちに導くことができる．これを，フーリエ級数の式 (6) に代入すると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}(e^{inx}+e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2}(e^{inx}-e^{-inx})\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}\right]
\end{aligned} \tag{36}$$

となる．これは，いままでと同一の式である．左辺は実数で，右辺の値も実数となる．右辺には虚数部が含まれるが，それはキャンセルされてゼロとなる．ここで，

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \tag{37}$$

とする[3]．すると，かなり形式的ではあるが，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{38}$$

が得られる．これを複素フーリエ級数という．フーリエ係数 c_n は，実数のフーリエ級数の係数を求める式から得ることができる．c_0 は次のようする．

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{39}$$

c_n は次のようにする．

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - i\sin nx]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{40}$$

c_{-n} も同様である．

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx + i\sin nx]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{41}$$

よく見ると，係数を計算する 3 つの式 (39)(40)(41) は，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \cdots) \tag{42}$$

とまとめることができる．

そして，c_n と c_{-n} は複素共役の関係

$$c_n^* = c_{-n} \tag{43}$$

がある．c_n が計算できれば c_n は直ちに求めることができる．

[3]教科書 p.229 では α_n としている．ただし，p.237 では c_n としている．

5.2　区間 $[-L, L]$ で定義された関数

区間 $[-L, L]$ で定義された関数 $g(x)$ の場合，ほとんど同じ議論で，

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi x)/L} \tag{44}$$

となる．係数は，

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i(n\pi x)/L}\, \mathrm{d}x \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \tag{45}$$

と導くことができる．

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.