# 後期中間試験解答用紙 (3E 電気数学)

2006 年 12 月 6 日　　電気情報工学科　　学籍番号　　　　氏名

## 1　フーリエ級数を学ぶための基礎

### 1.1　オイラーの公式

**[問 1]** $\boxed{\textit{5}\text{点}}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

**[問 2]** $\boxed{\textit{5}\text{点}}$

オイラーの公式より，

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1}$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{2}$$

となる．最初の公式に $x \to -x$ とすると 2 番目の式が得られる．これらの式から，

$$\frac{\text{式 (1)} + \text{式 (2)}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\frac{\text{式 (1)} - \text{式 (2)}}{2i} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

と $\sin x$ と $\cos x$ を表すことができる．

### 1.2　直交関数系

**[問 1]** $\boxed{\textit{20}\text{点}}$

オイラーの公式を利用して，問題の式 (2) を計算する．

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)\left(\frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(n+m)x} - e^{-i(n+m)x} - e^{i(n-m)x} + e^{-i(n-m)x}}{-4}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{e^{i(n+m)x} + e^{-i(n+m)x}}{2} - \frac{e^{i(n-m)x} + e^{-i(n-m)x}}{2}\right]\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(n+m)x - \cos(n-m)x\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$m = n$ と $m \neq n$ の場合に分けて，計算を進める．

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+n)x - 1\right]\mathrm{d}x & (m = n) \\ -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(n+m)x - \cos(n-m)x\right]\mathrm{d}x & (m \neq n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - x\right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \\ -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} & (m = n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}
\end{aligned}$$

## 2　フーリエ級数

［**問 1**］ *20 点*

フーリエ係数 $a_0$ と $a_n$，$b_n$ は，以下のように求める．

$a_0$ **の計算**　問題で与えられたフーリエ級数の式の両辺を区間 $[-\pi, \pi]$ で積分を行う．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right\}$$

問題ので与えられた式 (4) と (5) を使うと

$$= a_0\pi$$

これより，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

となり，$a_0$ を求めることができる．

$a_n$ **の計算**　問題で与えられたフーリエ級数の式の両辺に $\cos mx$ を乗じて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分を行う—ことにより，コサインの係数の $a_n$ を求める．ただし，$m$ は自然数とする．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x\right\}$$

問題で与えられた式 (4) と (1)，(3) を使うと

$$= a_m\pi$$

これより，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

を計算することにより，$a_n$ を求めることができる．

$b_n$ **計算**　つぎに，問題で与えられたフーリエ級数の式の両辺に $\sin mx$ を乗じて区間 $[-\pi, \pi]$ で積分を行う．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\mathrm{d}x\right\}$$

問題で与えられた式 (5) と (3)，(2) を使うと

$$= b_m\pi$$

これより，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

を計算することにより，$b_n$ を求めることができる．

**[問 2]** $\boxed{\textit{20 点}}$

問題で与えられた関数 $f(x)$ は周期 $2\pi$ をもち，区間 $[-\pi,\,\pi]$ で，

$$f(x) = x$$

である．そして，$f(x)$ は奇関数となっている．

これを利用すると，直ちに

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

となる．最初は奇関数 $x$ を区間 $[-\pi,\,\pi]$ を積分しているため明らかである．二番目の式では，$x$ は奇関数，$\cos nx$ は偶関数である．それらの積は奇関数となるので，区間 $[-\pi,\,\pi]$ での積分はゼロとなるから，二番目の式もゼロである．

つぎに，フーリエ係数 $b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の計算を行う．

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

被積分関数は偶関数なので

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x$$

部分積分法を使うと

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

以上の結果より，問題で与えられた周期関数をフーリエ級数で表すと，次のようになる．

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x + \cdots\right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx
\end{aligned}$$

## 3　最良近似としてのフーリエ級数

**[問 1]** $\boxed{\textit{10 点}}$

二乗平均後差を $E$ とすると，以下のように定義できる．

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 \mathrm{d}x$$

**[問 2]** $\boxed{\textit{15 点}}$

具体的な二乗平均誤差は，

$$E(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right]^2 \mathrm{d}x$$

となる．$a_0$ と $a_k$，$b_k$ をパラメーターとして，二乗平均後差が最小になるためには，次式を満たさなくてはならない．

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial a_k} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial b_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

$a_0$ **の計算**　二乗平均後差が最小になる $a_0$ を計算する．そのためには，$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0$ を利用する．

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_0} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right]\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

右辺の積分について，問題で与えられた式 (4) と (5) を使うと，

$$0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \frac{a_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x + \frac{a_0}{2}$$

となる．したがって，$a_0$ は次のように求めることができる．

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

$a_k$ **の計算**　二乗平均後差が最小になる $\ell$ 番目の係数 $a_\ell$ を計算する．そのためには，$\frac{\partial E}{\partial a_\ell} = 0$ を利用する．

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_\ell} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right]\cos \ell x\mathrm{d}x$$

問題で与えられた式 (4) と (1)，(3) を使うと，

$$0 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \ell x\mathrm{d}x + \frac{a_\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos \ell x\cos \ell x\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \ell x\mathrm{d}x + a_\ell$$

となる．したがって，$a_k$ は次のように計算できる．

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x$$

$b_k$ **の計算**　二乗平均後差が最小になる $\ell$ 番目の係数 $b_\ell$ を計算する．そのためには，$\frac{\partial E}{\partial b_\ell} = 0$ を利用する．

$$0 = \frac{\partial E}{\partial b_\ell} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right]\sin \ell x\mathrm{d}x$$

問題で与えられた式 (5) と (3)，(2) を使うと，

$$0 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \ell x\mathrm{d}x + \frac{b_\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin \ell x\sin \ell x\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \ell x\mathrm{d}x + b_\ell$$

したがって，$b_k$ は次のように計算できる．

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x$$

**[問 3]** $\boxed{\textit{5 点}}$

「2 フーリエ係数 [問 2]」で求めたフーリエ係数と「3 最良近似としてのフーリエ係数 [問 2]」で求めた最小二乗誤差のパラメーターの計算は全く同じである．したがって，フーリエ係数は最小二乗誤差の計算と同じことになっている．