フーリエ級数と最小二乗法・複素フーリエ級数

山本昌志*

2006 年 11 月 21 日

概 要

最小二乗法を説明し，フーリエ級数が最良の最小二乗近似になっていることを示す．さらに，フーリエ級数を複素数の指数関数で表すことを示す．

1 本日の内容

本日の内容は，教科書 [1] の p.228–230 ページである．ここでは，フーリエ級数が展開の項数に関わらず最良近似になっていることと，フーリエ級数を複素数で表すことを学ぶ．本日の学習の目標は，つぎのとおりである．

- 最小二乗法の意味が分かる．
- フーリエ級数が最小二乗法での最良近似となっていることが分かる．
- フーリエ級数を複素数の指数関数で表す方法が分かり，計算ができる．

2 最良近似としてのフーリエ級数

2.1 最小二乗法

最小二乗法というのは，データをある関数で最良近似する方法である．例えば，

$$(1.2,\ 2.2) \quad (2.1,\ 3.8) \quad (3.3,\ 5.6) \quad (4.1,\ 7.1) \quad (5, 8.8) \tag{1}$$

の (x,y) の実験データがあるとする．これを直線で近似 $y=ax+b$ したい．どうすればよいか?—という問題である．誤差の 2 乗が最小になる直線が最良近似とすることができる．これを最小二乗法 (least squares method) と言う．式で表すと，誤差の二乗の和 $E(a,b)$ は，

$$E(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2 \tag{2}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

となる．(x_i, y_i) は，i 番目のデータで，n はデータの個数である．この誤差が最小になる a と b を捜す．式 (2) は a にも b にも 2 次式でその係数は正の値なので最小値がある．誤差 E の最小値は，それぞれ偏微分した値がゼロとなるときに得ることができる．

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial b} = -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b) = 0 \tag{3}$$

これは，a と b の連立方程式である．すなわち，

$$\left\{ \begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned} \right. \tag{4}$$

である．これを解くと

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \tag{5}$$

となる．

最初に示したのデータについて計算してみると，$a = 1.452119$, $b = 0.708006$ となる．ゆえに，最小二乗法による 1 次関数は

$$y = 1.452119x + 0.708006 \tag{6}$$

となる．データをこの間数をプロットすると，図 1 のようになる．

グラフ作成ソフトウェアーは，最小二乗法によるデータのフィッティングをサポートしているものが多い．EXCEL でも可能なはずである．実験データの整理に使うと良い．

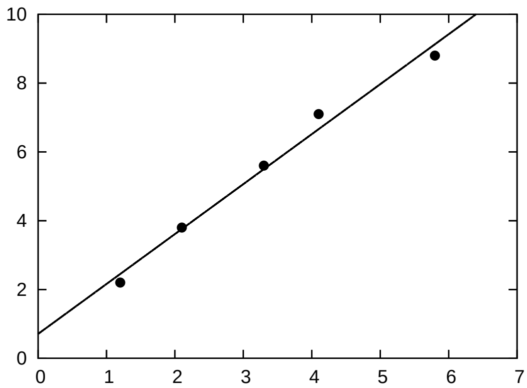

図 1: データを最小二乗法でフィット

ここでは，偏微分により最小二乗法の式を導いたが，線形代数の部分空間への射影を考える方が簡単である．これについては，参考文献 [2] に詳しく書いてある．これは良い教科書なので，一読を勧める．

2.2 フーリエ級数の最小二乗法

2.2.1 誤差の積分

ここでは，フーリエ級数で関数をフィッティングした場合の誤差を考える．

区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ は，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)
\end{aligned} \tag{7}
$$

のようにフーリエ級数で表すことができる．例えば，$[\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x) = x$ は，

$$
f(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots\right] \tag{8}
$$

と表すことができる．ここで，区間 $[-\pi, \pi]$ での元の関数 x と，式 (8) の右辺の誤差の 2 乗 E を考える．一次関数でデータをフィッティングしたときは，誤差の 2 乗の和であったが，ここでは関数をフィッティングするので誤差の二乗の積分になる．

$$
E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{x - 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots\right]\right\}^2 \mathrm{d}x \tag{9}
$$

積分の前に $1/2\pi$ は気にする必要は無い．教科書に合わせているだけで，トータルの誤差ではなく平均誤差を表している．証明はしていないが，フーリエ級数の展開の係数を無限大まで計算すると，$E \to 0$ となる．誤差の 2 乗の積分がゼロとなる[1]．

2.2.2 三角関数でフィットするときの最小二乗法

フーリエ級数とは全く話を別にして，区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ を三角関数で最小二乗法で近似する．すなわち，

$$
S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \tag{10}
$$

で近似する．なんか，フーリエ級数そっくりではないか?—とツッコミをいれたくなるが，それとはまったく別なもの，フーリエ級数など知らないとして，話を進める．ある関数 $f(x)$ を $S_n(x)$ で近似することを考える．ここで，式 (10) の係数 a_k と b_k を上手に選んで，$f(x)$ との誤差が最も小さくなるようにする．ちょうど，最初に示したデータとの誤差を最小にする 1 次関数の係数を求めたようにする．二乗平均誤差[2]を，

$$
E(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x \tag{11}
$$

と定義する．この二乗平均誤差は，係数 a_k や b_k の関数となっている．この係数が変わると誤差の量も変化する．この式は，1 次関数でデータをフィットするときの誤差を表す式 (2) に対応する．

[1] これに関係して，ギブツの現象という興味深いものがある．

[2] 区間 $[a, b]$ の $f(x)$ の平均は，$<\text{平均}>= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ となる．

誤差を表す式 (11) を最小にするには，a_k と b_k をどのように選ぶか?— ということが問題となる．これを最小にするということは，関数 $f(x)$ を三角関数で近似する最適な係数を決めることに他ならない．式 (11) には最小値があり，関数を近似する最適な a_k と b_k がある．なぜならば，全ての a_k と b_k は係数が正の 2 次式であるため，最小値があるからである．この最小値はそれぞれの偏微分がゼロになるときに得られる．すなわち，

$$\frac{\partial E}{\partial a_0}=0 \qquad \frac{\partial E}{\partial a_1}=0 \qquad \frac{\partial E}{\partial a_2}=0 \qquad \cdots \qquad \frac{\partial E}{\partial a_n}=0 \tag{12a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_1}=0 \qquad \frac{\partial E}{\partial b_2}=0 \qquad \cdots \qquad \frac{\partial E}{\partial b_n}=0 \tag{12b}$$

が条件となる．この具体的な計算は，式 (11) に式 (10) を代入して偏微分がゼロとなる a_k や b_k を求める．

準備　a_k や b_k を求める具体的な計算の前に，ここで使う三角関数の重要な式を示しておく．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi & (n=m)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases} \tag{13}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x=0 \tag{14}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \tag{15}$$

これらの式は，第 4 回の講義で話した内容である．

a_0 の計算　二乗平均後差が最小になる a_0 は，次のように計算して求める．

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial E}{\partial a_0}\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\left\{f(x)-\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\right\}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

式 (15) より $\sin kx$ と $\cos kx$ の積分はゼロとなるので，

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)-\frac{a_0}{2}\right\}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{a_0}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{a_0}{2}\end{aligned} \tag{16}$$

である．ゆえに，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{17}$$

となる．これは，フーリエ級数の a_0 の計算と同じ．

a_k **の計算**　二乗平均後差が最小になる ℓ 番めの係数 a_ℓ を計算する

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial E}{\partial a_\ell} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left\{f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]\right\}\cos \ell x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

式 (13)(14)(15) を使うと，

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \ell x \,\mathrm{d}x + \frac{a_\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos \ell x \cos \ell x \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos \ell x \,\mathrm{d}x + a_\ell \qquad (18)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \,\mathrm{d}x \qquad (19)
$$

である．これもフーリエ係数の計算と同じ

b_k **の計算**　同様にし，二乗平均後差が最小になる ℓ 番めの係数 b_ℓ を計算する

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial E}{\partial b_\ell} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left\{f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]\right\}\sin \ell x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

式 (13)(14)(15) を使うと，

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \ell x \,\mathrm{d}x + \frac{b_\ell}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin \ell x \sin \ell x \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \ell x \,\mathrm{d}x + b_\ell \qquad (20)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x \qquad (21)
$$

である．これもフーリエ係数の計算と同じ．

2.2.3　まとめ

フーリエ級数は，関数 $f(x)$ を最小二乗法で近似している．これは，展開する三角関数が有限個の場合，その展開の項数に関わらずいつも最良近似となっている．展開の項数に関わらず，同じ係数でいつでも最良近似となるのは，展開する三角関数の列が直交関数系となっているからである．テイラー展開ではこのようにならない．

3　複素フーリエ級数

三角関数の計算は厄介なので，指数関数を使った方が便利なことが多い．そこで，複素数の指数関数を使ったフーリエ級数を考える．そのためには，2 回目の講義で述べたオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{22}$$

が重要な役割を果たす．これから

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{23}$$

を直ちに導くことができる．これを，フーリエ級数の式 (7) に代入すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2}(e^{inx} - e^{-inx})\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}\right] \end{aligned} \tag{24}$$

となる．これは，いままでと同一の式である．左辺は実数で，右辺の値も実数となる．右辺には虚数部が含まれるが，それはキャンセルされてゼロとなる．ここで，

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \tag{25}$$

とする[3]．すると，かなり形式的ではあるが，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{26}$$

が得られる．これを複素フーリエ級数という．フーリエ係数 c_n は，実数のフーリエ級数の係数を求める式から得ることができる．c_0 は次のようする．

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{27}$$

[3] 教科書 p.229 では α_n としている．ただし，p.237 では c_n としている．

c_n は次のようにする．

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - i\sin nx]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{28}$$

c_{-n} も同様である．

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx + i\sin nx]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{29}$$

よく見ると，係数を計算する 3 つの式 (27)(28)(29) は，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0,\, \pm1,\, \pm2,\, \cdots) \tag{30}$$

とまとめることができる．

そして，c_n と c_{-n} は複素共役の関係

$$c_n^* = c_{-n} \tag{31}$$

がある．c_n が計算できれば c_n は直ちに求めることができる．

区間 $[-L,\, L]$ で定義された関数 $g(x)$ の場合，ほとんど同じ議論で，

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi x)/L} \tag{32}$$

となる．係数は，

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i(n\pi x)/L}\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0,\, \pm1,\, \pm2,\, \cdots) \tag{33}$$

と導くことができる．

まとめ (複素フーリエ級数)

- 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ は，複素フーリエ級数で表すことができる．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

係数は，つぎのようになる．

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

- 区間 $[-L, L]$ で定義された関数 $g(x)$ は，複素フーリエ級数で表すことができる．

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi x)/L}$$

係数は，つぎのようになる．

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i(n\pi x)/L}\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

4 課題

4.1 レポート提出要領

期限	11 月 28 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気数学」 課題名「課題　(フーリエ級数と最小二乗法・複素フーリエ級数)」 提出日 3E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

4.2 課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

[**問 1**]　区間 $[-\pi, \pi]$ で $f(x) = x$ と定義される関数を複素フーリエ級数で表せ．

[問 2] 教科書の p.237 [1] 演習問題 IV-I[B] の 4

[問 3] 教科書の p.237 [1] 演習問題 IV-I[B] の 5

[問 4] 教科書の p.222–230 を 3 回読め．

4.3 小テスト

次回の授業のはじめに小テストを行う．以下の問題が 15 分以内に書けるように練習すること．

- 区間 $[-\pi, \pi]$ で $f(x) = x$ と定義される関数を複素フーリエ級数で表せ．

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.

[2] Gilbert Strang. 線形代数とその応用. 産業図書株式会社, 1992.