オイラーの公式と三角関数

山本昌志*

2006 年 10 月 16 日

概 要

テイラー展開の概要を示し，三角関数と指数関数のテイラー展開を導く．そして，オイラーの公式とそれを使った三角関数の諸公式を導く．三角関数の諸公式とオイラーの公式は，フーリェ解析を学習する上で必要不可欠な基礎知識である．

1 前回の復習と本日の学習内容

1.1 前回の内容

前回は，これまでの学習の確認試験を行った．統計データについては，後日報告する．

1.2 本日の内容

最初に断っておくが，私は数学の専門家ではない．しかし，数学をよく使いいろいろな場面でお世話になっている．そのため，厳密な証明よりも実際の場面で使えるように直感的に理解することの方を重要視している．この講義では，分かり難く退屈な証明よりも感覚的に理解することを目指す．その方が実際の科学技術の問題を数学を使って解決するときに役に立つ．ただ，厳密な数学の証明が不要というわけではない．それは，数学の講義に任せることにする．

本日は，三角関数に関する諸公式をオイラーの公式 (Euler's formula) より簡単に導く方法を示す．この講義のメインテーマであるフーリェ解析 (Fourier analysis) では三角関数に係わる計算が多い．三角関数の性質が分かっていないと，計算ができなくなる．そこで，本日の講義では，以下のような順序で三角関数の諸々の定理を導く．

1. 任意の関数を冪級数 (power series) に展開するテイラー展開 (Taylor expansion)，ここではその特別な場合のマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) を示す．テイラー展開を用いると，任意の関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned} \tag{1}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

と表すことができる．

2. 三角関数や指数関数もテイラー展開可能である．それらを，冪級数で表すと

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{4}$$

となる．これら，オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{5}$$

を導くことができる．

3. オイラーの公式から，三角関数に関する諸々の定理—加法定理や倍角の公式など— をしめす.

これを理解すると，三角関数に係わるいろいろな問題が簡単に計算できるようになる．それればかりではなく，来年学習する複素関数などの学習にもスムーズに移行できるであろう．さらに，数学のみならず，電気に関係する問題も簡単に計算できるようになる．

2　テイラー展開から三角関数の諸公式

2.1　テイラー展開

2.1.1　任意のデータを冪級数で表現

(x, y) の N 個の任意のデータ点を通過する関数を考える．全てのデータ点を通る関数は，$N-1$ 次関数で記述できる．データ点が 2 つならば 1 次関数，3 つならば 2 次関数のようにである．諸君は，これまでの学習で 2 点から直線を，3 点から 2 次関数を決めたりしているだろう．図 1 のように勝手に決めた 10 個の点から，9 次関数を決めることもできる．なぜならば，$N-1$ 次関数

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots + a_{N-1} a^{N-1} \tag{6}$$

には N 個の係数があり，それらの係数は N 個の点により一意に決定できるからである．

2.1.2　任意の関数のテイラー展開

前節では，どんな任意のデータでも冪乗の関数で表現できることを示した．データの数が非常に多くなって，無限までになったらどうなるだろうか?．データの数が無限というのは，データが連続するもの，すなわち関数と考えることができる．例えば，三角関数は無限個の (x, y) のデータの集まりである．このような

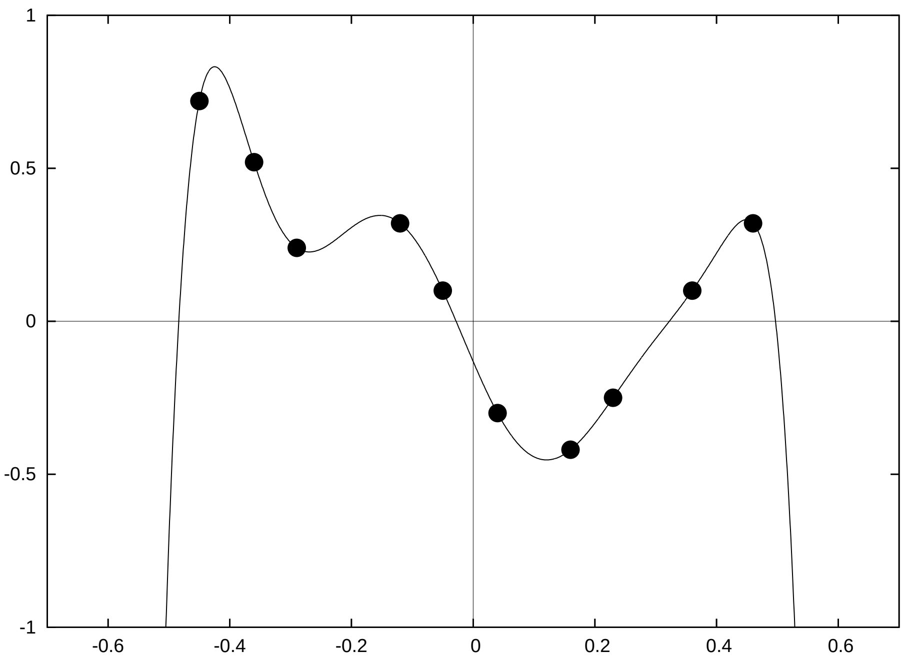

図 1: 勝手に決めた 10 点を 9 次関数で表現.

データに対しての先ほどの問いかけについて，私は答えられない．しかし，直観あるいはコンピューターの助けを借りて，厳密ではないにしても，実用上問題ない結果を得ることができる．

もし，ある関数が無限個のデータの集まりと考え，

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned} \tag{7}$$

と表すことができるとしよう．$f(x)$ は三角関数であったり，指数関数，あるいは対数関数である．この式の左辺は，冪級数と呼ぶ．この式は，任意の関数を冪球数に展開しているのである．証明は数学の時間に任せるとして，任意の関数はこのように冪級数に展開できる．

任意の関数 $f(x)$ が式 (7) のように冪級数に展開できるならば，その係数 a_n をどうやって決めるのか?—という問題がのこる．有限個の場合のように，連立方程式から係数を計算することはできない．無限次元の連立方程式など解けないからである．そこで，連続な関数という性質を使う．元の式 (7)，およびその両辺

を繰り返し微分すると次の式が得られる．

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots \tag{8}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 \cdots \tag{9}$$

$$f''(x) = 2\times1\times a_2 + 3\times2a_3x + 4\times3a_4x^2 + 5\times4a_5x^3 + 6\times5a_6x^4 \cdots \tag{10}$$

$$f^{(3)}(x) = 3\times2\times1\times a_3 + 4\times3\times2a_4x + 5\times4\times3a_5x^2 + 6\times5\times4a_6x^3 \cdots \tag{11}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \frac{(n+1)!}{1!}a_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}x^2 + \frac{(n+3)!}{3!}a_{n+3}x^3 + \cdots \tag{12}$$

これらの式で $x=0$ とすると，右辺第 2 項より高次の項は全てゼロとなる．これを利用して，式 (7) の展開係数は

$$a_0 = f(0) \qquad a_1 = f'(0) \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2\times1} \qquad a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3\times2\times1} \qquad \cdots \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{13}$$

と得られる．$0! = 1$ とすると，最後の式である $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ が $n=0$ を含めて一般的に成り立つ．式 (7) を合わせて，

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{14}$$

となる．これで，任意の関数を冪級数で展開する方法が分かった[1]．このようにある関数を冪球数で展開する方法をテイラー展開と言う．

式 (14) は，不思議な式である．一般に，左辺の関数の定義域は $[-\infty,\infty]$ と広い．それに対して，右辺の冪級数は $x=0$ の値のみできまる．無限にひろがる関数が $x=0$ のときの性質で決まる—という不思議なことになっている．

まとめ (テイラー展開)

- 任意の関数は，冪級数に展開—テイラー展開—できる．

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

2.1.3 三角関数と指数関数のテイラー展開

先の説明では，どんな関数でも冪球数に展開できると言った．そこで，三角関数と指数関数をテイラー展開[2]してみよう．

[1]本当は，この右辺が収束する範囲を言わなくてはならない．そこまでの話はここの講義ではできないので，数学で学習せよ
[2]ゼロの回りでのテイラー展開である．マクローリン展開とも言う

式 (14) の $f(x)$ を $\sin x$ とすると，

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 - \frac{\sin(0)}{6!}x^6 + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (15)
\end{aligned}$$

がえられる．いままで，三角関数は幾何学的な意味で使われてきた．幾何学的に考えた三角関数の場合，任意の x での $\sin x$ の計算は大変難しい．それに対して，式 (15) の右辺には幾何学的な意味はなく，解析的である．したがって，どんな x に対しても $\sin x$ の計算が可能である．これは，まことに便利と言わざるを得ない．

でも，本当かなー—という疑問が湧く者もいるだろう．正直，私も信じられない．このような時，私はコンピューターを使って確かめることが多い．式 (15) の右辺を $x, x^3, x^7, x^{15}, x^{31}, x^{51}, x^{101}$ まで，展開の項数を変化さて計算してみた．その結果を図 2 に示す．展開の項数が増加するごとに $\sin x$ を正確に表していることが分かるであろう．これで，テイラー展開は正しいと信じた．

同じことを $\cos x$ で行うと，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 - \frac{\sin(0)}{5!}x^5 - \frac{\cos(0)}{6!}x^6 + \cdots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (16)
\end{aligned}$$

指数関数 e^x もテイラー展開できる．

$$\begin{aligned}
e^x &= e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 + \frac{e^0}{4!}x^4 + \frac{e^0}{5!}x^5 + \frac{e^0}{6!}x^6 + \frac{e^0}{7!}x^7 + \frac{e^0}{8!}x^8 + \frac{e^0}{9!}x^9 + \cdots \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (17)
\end{aligned}$$

これらの三角関数と指数関数のテイラー展開の式から，それぞれの関数の値を解析的に計算ができるようになる．いままで，三角関数は幾何学的に，指数関数は乗算の延長??のように定義されていた．このような定義では，解析に値を計算することに困難をきたす．それに代わり，このテイラー展開の式がそれぞれの関数の定義と考えると，計算が格段に簡単になる．このように定義しても，いままで使ってきた三角関数や指数関数の性質は失われない[3]．そこで，これからは三角関数と指数関数の定義として，テイラー展開の結果を使う．

[3]信じられないならば，微分をしてみよ．以前と同じである

まとめ (三角関数と指数関数テイラー展開)

- 三角関数と指数関数は，次のようにテイラー展開できる．

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{16!} - \frac{x^{18}}{18!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{17}}{17!} - \frac{x^{19}}{19!} + \cdots$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

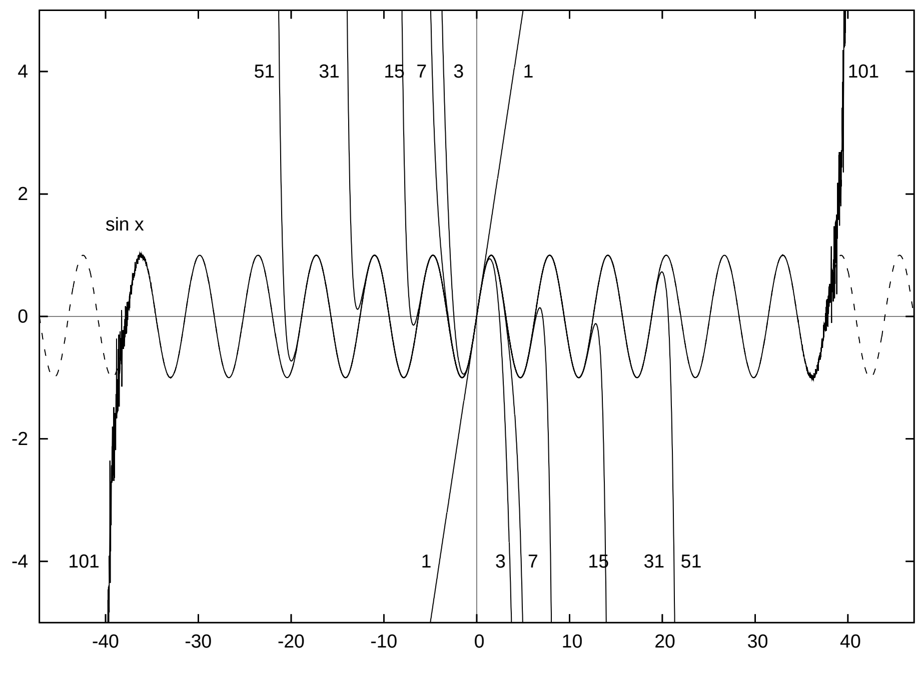

図 2: $\sin x$ のテイラー展開．図中の整数は展開の次数を示す．

2.2　オイラーの公式

三角関数と指数関数のテイラー展開の式 (15) と (16)，(17) はよく似ている．若干異なるが，虚数単位 i を使うとさらに似てくる．かなり便宜的に思えるが，次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{12}}{12!}-\frac{x^{14}}{14!}+\frac{x^{16}}{16!}-\frac{x^{18}}{18!}+\cdots \\
i\sin x &= ix-i\frac{x^3}{3!}+i\frac{x^5}{5!}-i\frac{x^7}{7!}+i\frac{x^9}{9!}-i\frac{x^{11}}{11!}+i\frac{x^{13}}{13!}-i\frac{x^{15}}{15!}+i\frac{x^{17}}{17!}-i\frac{x^{19}}{19!}+\cdots \\
e^{ix} &= 1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+i\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{10}}{10!}-\cdots
\end{aligned}$$

ますます，三角関数と指数関数が似てきた．これらより，

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{18}$$

が得られる．これが，**オイラーの公式**と呼ばれるものである．虚数を介して，三角関数と指数関数がこんなにも簡単な式で結ばれているのである．これは便宜的に記述しただけの式に見えるが，科学技術の問題を考えるときに極めて有用である．これを使うとややこしい計算をすること無く，様々な問題が解ける．諸君はできるだけオイラーの公式を利用せよ．

オイラーの公式から，

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{19}$$

と書くこともできる．

もともと，三角関数は幾何学的に定義された．それに対して，指数関数は解析的に定義された．そして，虚数は方程式を解くために導入された．これら，勝手に定義されたものが，こんな単純な式で関係づけられるのは驚きである．

2.3　三角関数の諸公式

オイラーの公式を使うと，この節で示すように三角関数に関する公式が簡単に得られる．この単純な方法を憶えておくと，後々，便利である．これだけでもオイラーの公式の御利益が分かるだろう．

加法定理　$e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}$ を使うと，三角関数の加法定理が得られる．オイラーの公式を使うと，指数関数の $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}$ は，

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) \\
&= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)
\end{aligned} \tag{20}$$

となる．両辺が等しいということは，実部と虚部が等しいということである．したがって，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{21}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta \tag{22}$$

が得られる．これは，三角関数の加法定理そのものである．

倍角の公式　$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ を使うと，2 倍角や 3 倍角 $\cdots$ の公式を得ることができる．例えば，$n = 2$ とするとこの指数関数は，

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\cos\theta\sin\theta \qquad (23)\end{aligned}$$

となる．これもまた，実数部と虚数部の各々が等しいので，

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \qquad (24)$$

$$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta \qquad (25)$$

を得る．これは倍角の公式である．同様の手順で，$n = 3$ と

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \qquad (26) \\ &= (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) \qquad (27)\end{aligned}$$

3 倍角の公式

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad (28)$$

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad (29)$$

が簡単に得られる．

半角の公式　式 (24) を使っても簡単に求められる．式 (19) から計算することもできる．

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \left[\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}{2i}\right]^2 \qquad (30) \\ &= \frac{e^{ix} + e^{-ix} - 2}{-4} \qquad (31) \\ &= \frac{1 - \cos x}{2} \qquad (32)\end{aligned}$$

同じことをすれば，余弦に関する公式も得られる．

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \qquad (33)$$

積を和に変換する公式　加法定理を上手に使えば，三角関数の和を積に変換する公式は得られる．次のようにして計算することもできる．

$$\begin{aligned}\cos\alpha\sin\beta &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \times \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{4i} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i} - \frac{e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \qquad (34)\end{aligned}$$

積を和に変換する残りの公式

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \tag{35}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right] \tag{36}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \tag{37}$$

も同様に導くことができる．良い練習問題なので，諸君は自力で導いてみよ．

積を和に変換する公式　これは，ちょっと変わっていて，次のようにする．

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}+e^{i\beta} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}e^{i(\alpha-\beta)/2}+e^{i(\alpha+\beta)/2}e^{i(-\alpha+\beta)/2} \\
&= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left[e^{i(\alpha-\beta)/2}+e^{-i(\alpha-\beta)/2}\right] \\
&= \left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \\
&\qquad \times\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+2i\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{38}$$

ところで，この式の右辺は，次のように書くこともできる．

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}+e^{i\beta} &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\beta+i\sin\beta) \\
&= (\cos\alpha+\cos\beta)+i\,(\sin\alpha+\sin\beta)
\end{aligned} \tag{39}$$

もちろん，式 (38) と (39) の両式の右辺は等しい．したがって，各々の実数部と虚数部が等しくなり，

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{40}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{41}$$

が得られる．これは，三角関数の和を積に直す公式である．同様にして，$e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ を計算すると，もう一組の公式

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{42}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{43}$$

が得られる．

3　課題

3.1　レポート提出要領

期限	10 月 24 日 (火) AM 8:45
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気数学」 課題名「課題　オイラーの公式と三角関数」 提出日 3E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

3.2　課題内容

[**問 1**]　以下の関数のテイラー展開を示せ．

$$\frac{1}{1+x} \qquad \log(1+x) \qquad \sqrt{1+x} \qquad \cos x \qquad \sin x \qquad e^x$$

[**問 2**]　オイラーの公式を使って，三角関数の加法定理を示せ．

[**問 3**]　オイラーの公式を使って，三角関数の倍角と 3 倍角の公式を示せ．

[**問 4**]　オイラーの公式を使って，三角関数の積を和に，和を積に直せ．講義で示さなかった，公式も全て書くこと．

次回の授業のはじめに小テストを行う．以下の問題が 20 分以内に書けるように練習すること．

- 三角関数と指数関数のテイラー展開の式．式 (15) と (16)，(17) の記号 $\sum$ を使わない式．
- オイラーの公式 (18) と三角関数の指数表示の式 (19)．
- オイラーの公式から加法定理を導く．
- オイラーの公式を用いて，倍角の公式を導く．
- オイラーの公式を用いて，積を和に直す．和を積に直す．