波動方程式の解 (初期条件)

山本昌志*

2007 年 2 月 20 日

概 要

初期条件や境界条件の設定の方法を学ぶ.

1 本日の学習内容

1.1 これまでの復習

図 1 に示すように x 軸と垂直な弦の振動の方程式を考える. x 軸からの弦の変位を $y(x,t)$ とする. 場所 x と時刻 t を決めたら弦の変位が決まるので, 変位は $y(x,t)$ と表すことができる. 弦の変位は $y(x,t)$ は, 弦の長さ L に比べて十分小さい場合, 次の偏微分方程式が成り立つ.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (c^2 = T/\rho,\ c \geq 0) \tag{1}$$

これを波動方程式と言う.

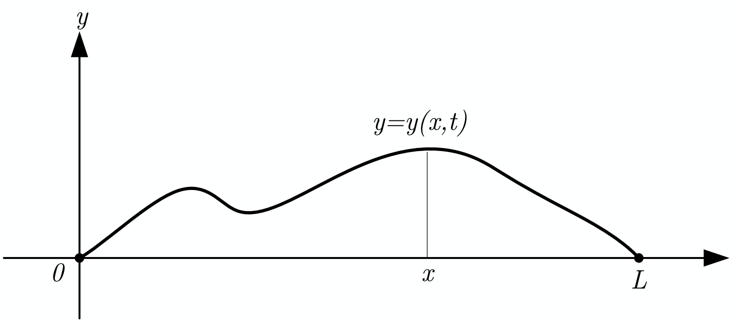

図 1: 弦の振動の様子.

波動方程式 (1)—偏微分方程式のひとつ—の解を,

$$y(x,t) = X(x)T(t) \tag{2}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

とそれぞれの変数の関数の積の形になると仮定する．これを変数分離形と言う．この仮定した解を元の偏微分方程式に代入する．すると，

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \tag{3}$$

が得られる．これは，

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{4}$$

となる．この左辺は時刻 t のみの関数で，右辺は場所 x のみの関数である．これが等しいということは，両辺の値は定数でなくてはならない．この定数を $-\lambda$ とすると，

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{5}$$

となる．これを整理すると，

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{6}$$

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \tag{7}$$

という連立常微分方程式になる．弦の振動の場合，図 1 に示すように弦の両端で固定されている．固定されている部分では，弦の変位 $y(x,t)$ はゼロである．したがって，

$$X(0,t) = 0 \qquad\qquad X(L,t) = 0 \tag{8}$$

である．この条件—境界条件—を満たすことができるのは，

$$X(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad\qquad \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \tag{9}$$

である．時刻の項の常微分方程式 (7) は，

$$T'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T = 0 \tag{10}$$

となる．$(n\pi c/L)^2$ は正の実数であるので，一般解は

$$T(t) = a_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{L} \tag{11}$$

となる．空間および時刻の常微分方程式から得られた解を元の仮定した解 (2) に代入すると

$$y_n(x,t) = C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L} \tag{12}$$

となる．元の波動方程式は線形なので，重ね合わせの原理が成り立つ．すなわち，解は

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_n y_n(x,t) \\ &= \sum_n \left(C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L} \right) \end{aligned} \tag{13}$$

と書き表すことができる．

1.2　本日の学習内容

本日は，波動方程式 (1) のに初期条件を組み込む方法を学習する．教科書 [1] では，p.250–251 の範囲である．ただし，教科書では初期条件とは言わないで境界条件としている．同じことではあるが，電気の習慣に従うことにする．本日のゴールは，次のとおりとする．

- 初期条件や境界条件の意味が分かる．
- 微分方程式の一般解に，初期条件や境界条件を取り込む方法が分かる．

具体的には，波動方程式の解である式 (13) の C_n や D_n の値を決める．

2　境界条件と初期条件

2.1　方程式を解くための条件

微分方程式や偏微分方程式を解き，値—ここでは弦の振幅—を求める場合，次のような境界条件や初期条件が必要となる．

- すなわち問題を解く場合の境界—定義域の端のこと—で値を指定することがある．この指定した値のことを**境界条件**という．

- 時刻 $t = 0$ の時に課す値のことを，**初期条件**という．むろん，条件を課す時刻はいつでもよいが，一般には計算に都合の良い $t = 0$ を選ぶ．

方程式で求める量—ここでは振幅—が，条件として与えられることもあるが，その微分の値が条件になることもある．もっと複雑な場合もある．

教科書では，このプリントで述べる初期条件と境界条件を合わせて，境界条件と記述している．しかし，電気の業界では，境界条件と初期条件は区別している．この講義は「電気数学」なので，これらは区別する．

ここでは，これらの境界条件から，式 (13) の C_n と D_n を決める方法をしめす．これらの係数を決定することにより，弦の振動が完全にきまる．

2.2　境界条件

弦の振動の境界条件は，

$$X(0,t) = 0 \qquad\qquad X(L,t) = 0 \tag{14}$$

である．物理的には，弦の両端を固定している—ことに対応している．すでに，この条件は式 (13) に含まれている．空間に関する波動方程式の解のうち sin の項のみを選んだ過程を思い出せ．

2.3　初期条件

式 (13) の C_n と D_n は，時刻 $t=0$ の弦の形と速度分布より決めることができる．$t=0$ のときの形と速度を

$$y(x,0)=f(x) \tag{15}$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=v(x) \tag{16}$$

とする．この様子を図 2 と 3 に示す．これらを**初期条件**という．初期の弦の形 $f(x)$ と速度分布 $v(x)$ は問題として与えられるので既知である．偏微分方程式 (1) は，初期条件以降の弦の運動を表す．

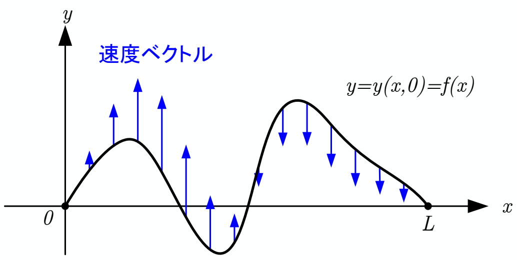

図 2: $t=0$ の波形 $f(x)$

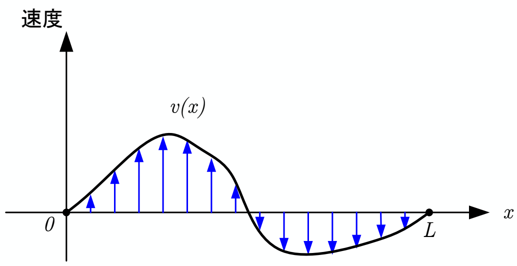

図 3: $t=0$ の速度分布 $v(x)$

偏微分方程式の解である式 (13) が初期条件を満足するように C_n と D_n を決めれば，波動方程式が完全に解けたことになる．それらの値は，初期条件と比較することにより決めることができる．式 (13) の $t=0$ の弦の形と速度は，

$$y(x,0)=\sum_n C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{17}$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=\sum_n D_n\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{18}$$

となる[1]．

解の式から求めたこれらは，初期条件である式 (15) と (16) に等しい．だから，

$$f(x)=\sum_n C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{19}$$

$$v(x)=\sum_n D_n\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{20}$$

[1]つぎに注意．$\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}=\sum_n \dfrac{n\pi c}{L}\left(-C_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}\sin\dfrac{n\pi ct}{L}+D_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi ct}{L}\right)$

となる．この式から，既知である $f(x)$ と $v(x)$ を使い C_n と D_n を決めれば，全て解けたことになる．問題は，この式から C_n と D_n を決めることである．

ここで，C_n と D_n を求める前に，$f(x)$ と $v(x)$ の性質を考える．$f(x)$ や $v(x)$ の定義域は $[0, L]$ である．したがって，$f(x)$ や $v(x)$ はフーリエ級数，フーリエ正弦級数，フーリエ余弦級数などで展開できる．また，$x=0$ と $x=L$ で弦は固定されているので，

$$f(0)=f(L)=0 \tag{21}$$

$$v(0)=v(L)=0 \tag{22}$$

となる．これらのことから，$f(x)$ と $v(x)$ はフーリエ正弦級数で展開する—ことが望ましい．係数の収束も早いし，式 (19) や (20) との対応も良い．すなわち

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad ここで，\quad p_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

$$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad ここで，\quad q_n=\frac{2}{L}\int_0^L v(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

である．

これらの式を，式 (19) や (20) に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin\frac{n\pi x}{L}=\sum_n C_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin\frac{n\pi x}{L}=\sum_n D_n \frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{26}$$

となる．したがって，

$$p_n=C_n \qquad q_n=D_n\frac{n\pi c}{L} \tag{27}$$

である．これから，

$$C_n=p_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

$$D_n=\frac{L}{n\pi c}q_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L v(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \tag{29}$$

と C_n と D_n を求めることができる．これで，波動方程式が境界条件や初期条件の元，完全に解けたことになる．解は，次のように書くことができる．

$$y(x,t)=\sum_n\left(p_n\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}+\frac{Lq_n}{n\pi c}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L}\right) \tag{30}$$

2.4 具体的な弦の振動の例

2.4.1 ラの音を出す

鉄でできたギターの弦でラの音を出すことを考える．弦の長さを 0.6 [m] 直径は 0.5 [mm] とする．鉄の密度は 7.8 [g/cm^3] なので，線密度 $\rho=1.5\times10^{-3}$ [kg/m] となる．

音の高低は，弦の張力で調整できる．音の振動数 f を表す式は，式 (30) より，

$$f = \frac{nc}{2L} \tag{31}$$

となる．基本波 ($n = 1$) を考えると，波の速度を $c = 2Lf$ になるように調整すれば良い．波の速度は，

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{32}$$

である．したがって，必要な張力は，

$$T = 4L^2 f^2 \rho \tag{33}$$

となる．先ほどのギターの弦の長さと線密度で，ドの音 (440Hz) を出すためには，必要な張力は $T = 418$ [N] となる．

2.4.2　弦の振動の状態

先ほどの状態のギターの弦を実際に振動させてみよう．どのように振動するであろうか? 弦の初期状態を図 4 のようにする．弦の中央をゆっくりとつまんで，そして離す．

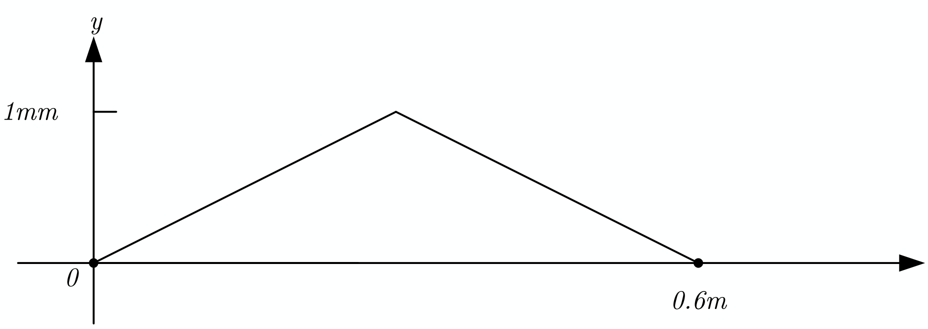

図 4: 弦の初期状態

式 (30) の p_n と q_n を決めれば，弦の振動は確定する．そのために初期条件を考えよう．$t = 0$ の時，弦の速度はどこでもゼロなので，$v(x) = 0$ である．したがって，式 (24) より，

$$q_n = 0 \tag{34}$$

となる．残りの p_n は，式 (23) を用いて計算する．弦の初期状態は

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ \alpha(L - x) & \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \tag{35}$$

と書くことができる．ここで，α は弦の傾き，L は弦の長さである．これから，p_n は，式 (23) を使うと次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
p_n &= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \alpha x \sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} \alpha(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}\left[-\alpha x\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} + \frac{2\alpha}{L}\int_0^{L/2}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{2}{L}\left[-\alpha(L-x)\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} - \frac{2\alpha}{L}\int_{L/2}^{L}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\alpha L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2\alpha}{L}\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} + \frac{\alpha L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2\alpha}{L}\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} \\
&= \frac{4\alpha}{L}\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{4\alpha L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$q_n = 0$ なので，弦の振動は，

$$
y(x,t) = \sum_n \frac{4\alpha L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} \tag{37}
$$

となる．$\sin(n\pi/2)$ の項は n が偶数の場合ゼロとなる．したがって，n は奇数のみを加算すればよい．すると，

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{N=1}^{\infty}\frac{4\alpha L}{(2N-1)^2\pi^2}(-1)^{N-1}\sin\frac{(2N-1)\pi x}{L}\cos\frac{(2N-1)\pi ct}{L} \\
&= \sum_{N=1}^{\infty}\frac{(-1)^{N-1}4\alpha L}{(2N-1)^2\pi^2}\sin\frac{(2N-1)\pi x}{L}\cos\frac{(2N-1)\pi ct}{L}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

となる．これが，最初の図 4 の状態の弦の振動を表す式である．これを弦の条件

$$
\alpha = \frac{1\times 10^{-3}}{0.3} \qquad L = 0.6 \qquad \frac{\pi c}{L} = 2\pi\times 440 \tag{39}
$$

を代入するとドの音がでる．位相が 30 度ごとの弦の状態を図 5〜10 にしめす．想像もつかないような弦の形になる．なぜ，このようなことが生じるか，物理的な理由を考えてみよ．

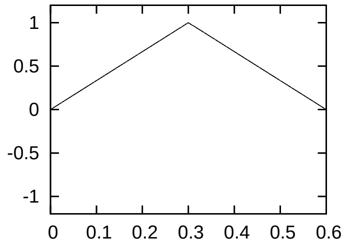

図 5: 時刻 0 [msec]

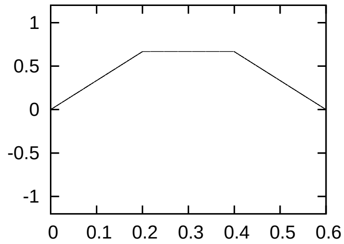

図 6: 時刻 0.18939 [msec]

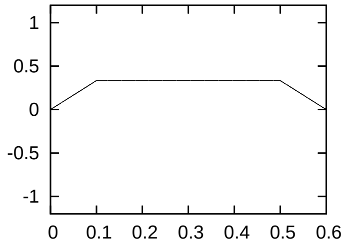

図 7: 時刻 0.37879 [msec]

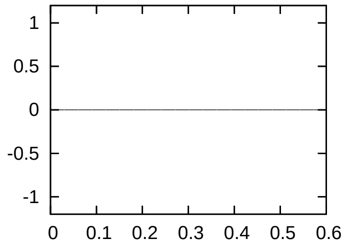

図 8: 時刻 0.56818 [msec]

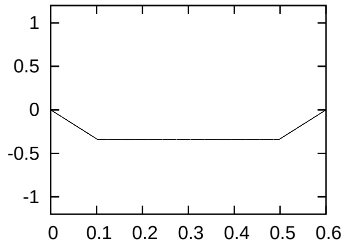

図 9: 時刻 0.75758 [msec]

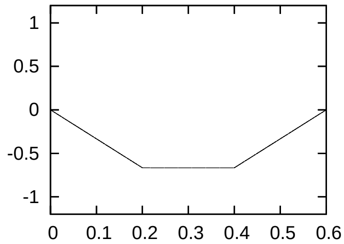

図 10: 時刻 0.94697 [msec]

3 課題

3.1 レポート提出要領

期限	2 月 27 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気数学」 課題名「課題　波動方程式の解 (初期条件)」 提出日 3E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

3.2 課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

[**問 1**] 本日の学習内容である波動方程式を初期条件を考慮した式 (30) を導け．プリントの通りに自分で計算してみろ—と言うこと．

[**問 2**] 教科書 [1] の p.252 の例題 2．途中の計算を省くことなく，できるだけ詳細に記述すること．

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.