波動方程式

山本昌志[*]

2007 年 2 月 6 日

概 要

偏微分方程式のひとつである波動方程式の物理的な意味を説明する．そして，波動方程式を連立の常微分方程式に変換する変数分離法を示す．

1 前回の復習と本日の学習内容

1.1 前回の復習

フーリエ変換 フーリエ変換 (Fourier transform) の式 (1) は，時間情報を周波数情報に変換している．すなわち，時刻の関数で振幅が $f(t)$ が分かったとすると，周波数 (角振動数) の関数でその振幅 $F(\omega)$ がわかる．逆フーリエ変換 (2) は，周波数情報から時間情報に変換する．

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{2}$$

導関数のフーリエ変換 導関数のフーリエ変換は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= i\omega F(\omega) \end{aligned} \tag{3}$$

となる．ようするに導関数のフーリエ変換は，元の関数のフーリエ変換の $i\omega$ 倍である．n 階の導関数のフーリエ変換は,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = (i\omega)^n F(\omega) \tag{4}$$

となる．

フーリエ変換の回路への応用 キルヒホッフの法則から回路が満たす微分方程式を作成し，フーリエ変換することにより，その微分方程式を解くことができる．特に周波数領域で定義されるインピーダンスを求めるのに有効である．

[*]国立秋田工業高等専門学校 電気情報工学科

1.2 本日の学習内容

本日の学習内容は，教科書 [1] の p.246–247 である．本日のゴールは次のように設定している．

- 小振動の弦の波動方程式—偏微分方程式—を導くことができる．
- 偏微分方程式を変数分離法により，連立の常微分方程式に変換できる．

2 波動方程式

2.1 波動方程式を求める

図 1 に示すように x 軸と垂直な弦の振動を考える．x 軸からの弦の変位を $y(x,t)$ とする．場所 x と時刻 t を決めたら弦の変位が決まるので，独立変数は x と t となる．そのため，変位は $y(x,t)$ と表す．ここでは，弦の変位は $y(x,t)$ の大きさは，弦の長さ L に比べて十分小さい $(y(x,t) \ll L)$ とする．これを弦の微小振動と言う．これは普通の弦—例えばギター— で成り立つことで，後の解析を容易にする．

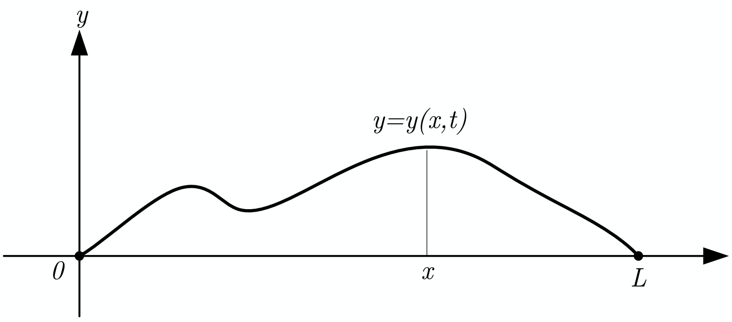

図 1: 弦の振動の様子．

この弦の振動は，純粋に力学の問題である．この力学の問題を考えるために，図 2 のように弦の一部を拡大し，運動方程式を導く．微小長さ $\varDelta s$ の区間に働く力は，

$$\text{P 点での力} = \begin{cases} -T_1\cos\alpha & x\text{ 方向の力} \\ -T_1\sin\alpha & y\text{ 方向の力} \end{cases} \qquad \text{Q 点での力} = \begin{cases} T_2\cos\beta & x\text{ 方向の力} \\ T_2\sin\beta & y\text{ 方向の力} \end{cases} \tag{5}$$

となる．三角関数はこのままでは考え難いので，

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \tag{6}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \tag{7}$$

とテイラー展開を使う．弦の長さ L に比べて振動の振幅が小さいということは，角度 α や β が小さいということである．この場合，$\alpha \ll 1$ および $\beta \ll 1$ となり，高次の項は無視して解析しても大差はない．そこ

で，三角関数の二次以上を無視すると，

$$\cos\alpha = \cos\beta = 1 \qquad \sin\alpha = \alpha \qquad \sin\beta = \beta \tag{8}$$

となる．ゆえに，微小長さ $\varDelta s$ の区間に働く力は，

$$\text{P 点での力} = \begin{cases} -T_1 & x\text{ 方向の力} \\ -T_1\alpha & y\text{ 方向の力} \end{cases} \qquad \text{Q 点での力} \quad = \begin{cases} T_2 & x\text{ 方向の力} \\ T_2\beta & y\text{ 方向の力} \end{cases} \tag{9}$$

となる．弦は，x 軸方向には振動しないので，P と Q に働く x 方向の力は等しいはずである．すなわち

$$T_1 = T_2 \tag{10}$$

となっている．この T_1 や T_2 は弦を引っ張る力で張力と呼ばれるものである．これは，弦に渡って等しく，記号 T を使うことにする．

いっぽう，弦の傾きもまた

$$\text{P 点での弦の傾き} = \tan\alpha \simeq \sin\alpha \simeq \alpha \qquad \text{Q 点での弦の傾き} = \tan\beta \simeq \sin\beta \simeq \beta \tag{11}$$

と近似できる．さらに，弦の傾きは関数 $y(x,t)$ の x の偏導関数に等しいので，

$$\text{P 点での弦の傾き} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x} \simeq \alpha \qquad \text{Q 点での弦の傾き} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\varDelta x} \simeq \beta \tag{12}$$

となる．

以上で運動方程式 (equation of motion) を求める準備ができた．x 軸方向は力がつりあって運動が生じないので興味がない．y 軸方向の運動を考えることにする．弦の線密度を ρ とした場合の運動方程式は，

$$T\beta - T\alpha = \rho\varDelta s\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{13}$$

となる．ここでも振動の振幅が小さいとすると，

$$\varDelta s \simeq \varDelta x \tag{14}$$

となり，さらに式 (12) を使うと，運動方程式は

$$T\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\varDelta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right) = \rho\varDelta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15}$$

と書き換えられる．左辺をテイラー展開して，第一項のみ取り出すと，

$$T\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x} + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x}\varDelta x - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right) = \rho\varDelta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{16}$$

が得られる．これを整理すると，

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{17}$$

となる．教科書のように整理すると，

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (c^2 = T/\rho,\, c \geq 0) \tag{18}$$

となる．これは，波動方程式 (wave equation) と呼ばれる偏微分方程式 (partial differential equation) である．特にこの場合のように空間が一次元の場合を一次元波動方程式 (one dimensional wave equation) と言う．

後でわかるが，c は弦を伝わる波の速度になっている．c が速度の次元であることを確かめるために，次元解析を行う．$[L]$ は長さの次元，$[M]$ は質量の次元，$[T]$ は時刻の次元とすると，

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{T}{\rho}}\text{の次元} &= \left\{\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]}\right\}^{1/2} \\ &= \frac{[L]}{[T]} \end{aligned} \tag{19}$$

となる．したがって，$c = \sqrt{T/\rho}$ は速度の次元を持つ．

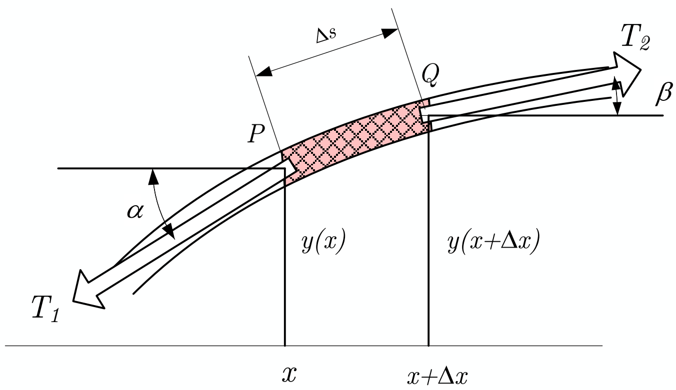

図 2: 弦の一部を拡大.

2.2　波動方程式の解

2.2.1　変数分離法

一般の偏微分方程式は解くことができないが，波動方程式のような特別な場合は解くことができる．通常，最初に試みる偏微分方程式の解法は変数分離法 (method of separation of variables) である．これが適用できる場合，偏微分方程式は連立の常微分方程式 (ordinary differential equation) に直すことができる．

波動方程式 (18)—偏微分方程式のひとつ—の解は，

$$y(x,t) = X(x)T(t) \tag{20}$$

とそれぞれの独立変数から成なる関数の積の形に表せると仮定する．このような仮定の元で，解を計算する方法を変数分離法という．ただし，これがいつも可能とは限らないので注意が必要である．ここでの講義の範囲では，常に変数分離法が使えるので，諸君は安心してよい．

解の形が決まったので，元の偏微分方程式に代入する．すると，

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \tag{21}$$

が得られる．これは，

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{22}$$

となる．この左辺は時刻 t のみの関数で，右辺は場所 x のみの関数である．これが等しいということは，両辺の値は定数でなくてはならない．この定数を $-\lambda$ とすると，

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{23}$$

となる．これを整理すると，

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{24}$$

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \tag{25}$$

という連立常微分方程式になる．

2.2.2　2 階の常微分方程式の一般解

これ以降は，来週．

3　課題

3.1　レポート提出要領

期限	2 月 13 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気数学」 課題名「課題　波動方程式」 提出日 3E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

3.2 課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

[問 1] 教科書 [1] の p.250 の問題 1.(1) と (2)

[問 2] 弦の小振動を表す波動方程式を原理的なところから導け．

[問 3] 教科書 [1] の p.245 の問題 4(1) と (2)

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.