フーリエ変換の応用 2

山本昌志*

2007 年 1 月 30 日

概 要

フーリエ変換を利用して，電気回路のインピーダンスを求める．

1 本日の学習内容

1.1 先週までの復習

1.1.1 フーリエ変換

フーリエ変換 (Fourier transform) は，時間情報を周波数情報に変換している．すなわち，時刻の関数で振幅が $f(t)$ が分かったとすると，周波数 (角振動数) の関数でその振幅 $F(\omega)$ がわかる．

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{2}$$

この式は，次のように理解する．

- $f(t)$ の $e^{i\omega t}$ 成分—すなわち角振動数 ω の成分の波— $F(\omega)$ は，ベクトルの内積を用いて成分を見出すように，関数を定義域で乗じて積分を行う．
- $f(t)$ は，周波数毎の振幅 $F(\omega)$ にその波 $e^{\imath\omega t}$ を加えあわせたものである．

1.1.2 導関数のフーリエ変換

導関数のフーリエ変換は，電気では極めて重要なのでもう一度，話しておく．導関数 $f'(t)$ のフーリエ変換を考える．フーリエ変換の定義の式 (1) に代入し，部分積分を行うと，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} \tag{3}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

が得られる．自然界の物理量 $f(t)$ は，

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0 \tag{4}$$

である．なぜならば，無限に続く波は存在しないからである．したがって，この式の右辺の第一項はゼロとなり，導関数のフーリエ変換は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= i\omega F(\omega)\end{aligned} \tag{5}$$

となる．ようするに導関数のフーリエ変換は，元の関数のフーリエ変換の $i\omega$ 倍である．

2 階の導関数のフーリエ変換も考えてみよう．同じように部分積分の公式を使うと，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(f)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t} \tag{6}$$

となる．式 (4) から，$f'(-\infty) = f'(\infty) = 0$ である．これから，右辺第一項はゼロとなる．右辺第二項は，導関数のフーリエ変換となっている．したがって，二階の導関数のフーリエ変換は，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = (i\omega)^2F(\omega) \tag{7}$$

となる．同じ計算を進めると，n 回の導関数のフーリエ変換は，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = (i\omega)^nF(\omega) \tag{8}$$

となる．

1.2　本日の学習内容

本日の内容は，教科書から離れてる．本日のゴールは次のとおりである．

- フーリエ変換を利用して電気回路のインピーダンスが求められる．

2　電気回路

2.1　回路素子

フーリエ変換を使って，図 1–3 の基本的な回路素子のインピーダンスを考えよう．諸君はこれらの回路素子の時間領域における基本的な動作の知識しかない— とする．回路の動作を表す時間領域の微分方程式から，周波数領域—正確には角振動数領域—の方程式に直して，周波数領域のインピーダンスを求めることにする．したがって，インピーダンスは ω の関数で，

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} \tag{9}$$

と定義する．ここで，$\tilde{V}(\omega)$ は周波数領域の電圧

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{10}$$

$\tilde{I}(\omega)$ は周波数領域の電流

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{11}$$

である．

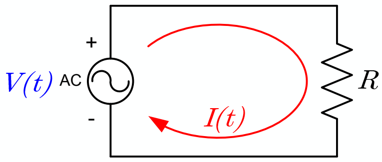

図 1: レジスタンス

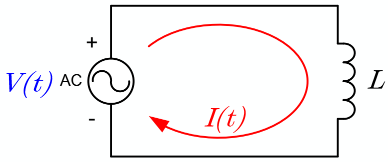

図 2: インダクタンス

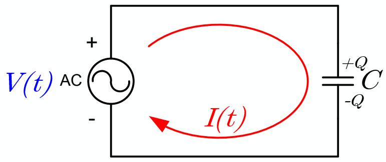

図 3: キャパシタンス

2.1.1　抵抗

図 1 の回路を計算することにより，抵抗の周波数領域のインピーダンスを求める．電流に関するキルヒホッフの法則は自動的に満たしている．電圧に関するキルヒホッフの法則より，

$$-V(t) + RI(t) = 0 \tag{12}$$

となる．両辺に $e^{-i\omega t}$ 両辺を乗じて，区間 $[-\infty, \infty]$ で t について積分を行う．すると，

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} RI(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t = 0 \tag{13}$$

が得られる．これは，フーリエ変換なので，

$$-\tilde{V}(\omega) + R\tilde{I}(\omega) = 0 \tag{14}$$

と書いてもよい．この式から，直ちに

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} = R \tag{15}$$

が得られる．普通の抵抗 (registance) は，周波数に依存しない．

2.1.2　インダクタンス

つぎに，図 2 の回路を計算することにより，インダクタンスの周波数領域のインピーダンスを求める．インダクタンスは，電流が増加すると電流を流さないように逆に電圧が発生する．発生する電圧は，電流の変化率に比例し，インダクタンス L の大きさにも比例する．電流の流れる方向を図 2 のようにして，インダクタンスの下から上方向を正の電圧とすると，

$$\begin{aligned} V_L(t) &= L \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{I(t+\varDelta t) - I(t)}{\varDelta t} \\ &= L \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{16}$$

となる．

図 2 の回路の電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t) + V_L(t) = 0 \tag{17}$$

となる．先の式から，

$$-V(t) + L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{18}$$

である．先ほど同様に，両辺をフーリエ変換する．ここで，導関数のフーリエ変換を使うと，

$$-\tilde{V}(\omega) + i\omega L\tilde{I}(\omega) = 0 \tag{19}$$

となる．したがって，この回路のインピーダンスは，

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} = i\omega L \tag{20}$$

である．インピーダンスは周波数に依存するのである．

2.1.3　キャパシタンス

つぎに，図 3 の回路を計算することにより，キャパシタンスの周波数領域のインピーダンスを求める．キャパシタンスは，電極に電荷が貯ると電圧が発生する．発生する電圧は，電荷量に比例し，静電容量 C にも反比例する．電荷の方向を図 3 のようにして，キャパシタンスの下から上方向を正の電圧とすると，

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \tag{21}$$

となる．

図 3 の回路の電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t) + V_C(t) = 0 \tag{22}$$

となる．先の式から，

$$-V(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \tag{23}$$

である．電流の関数を使いたいが，電荷の関数となっている．電荷から電流に直すために，両辺を時間で微分する．

$$-\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{24}$$

これは，

$$-\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{I(t)}{C}=0 \tag{25}$$

と書き直すことができる．電流と電荷の方向を図 3 のように決めたならば，

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=I(t) \tag{26}$$

の関係があるからである．

先ほど同様に，両辺をフーリエ変換する．ここで，導関数のフーリエ変換を使うと，

$$-i\omega\tilde{V}(\omega)+\frac{\tilde{I}(\omega)}{C}=0 \tag{27}$$

となる．したがって，この回路のインピーダンスは，

$$Z(\omega)=\frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)}=\frac{1}{i\omega C}=-\frac{i}{\omega C} \tag{28}$$

である．この場合もまた，インピーダンスは周波数に依存するのである．

2.2 直列・並列回路

つぎに，図 4 と図 5 の回路を考える．

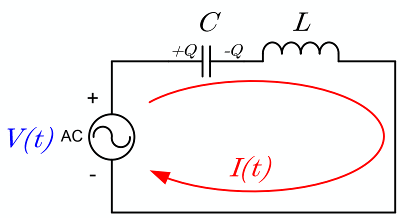

図 4: LC 直列回路

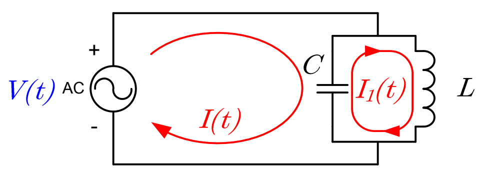

図 5: LC 並列回路

2.2.1 直列回路

図 4 の回路を表す電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t)+\frac{Q(t)}{C}+L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{29}$$

である．両辺を時間 t で微分し，$\mathrm{d}Q(t)/\,\mathrm{d}t = I(t)$ を使うと，

$$-\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{I(t)}{C} + L\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{30}$$

が得られる．両辺をフーリエ変換すると，

$$-i\omega\tilde{V}(\omega) + \frac{\tilde{I}(\omega)}{C} + (i\omega)^2 L\tilde{I}(\omega) = 0 \tag{31}$$

がえられる．これを整理すると，

$$i\omega\tilde{V}(\omega) = \left[\frac{1}{C} + (i\omega)^2 L\right]\tilde{I}(\omega) \tag{32}$$

となる．これから，電源からみた回路のインピーダンスは，

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} \\ &= \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \\ &= i\omega L - \frac{i}{\omega C} \end{aligned} \tag{33}$$

となる．

2.2.2 並列回路

図 4 の回路を表す電圧に関するキルヒホッフの法則は，

$$-V(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \tag{34}$$

$$-\frac{Q(t)}{C} + L\frac{\mathrm{d}I_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{35}$$

である．それぞれの式の両辺を微分すると，

$$-\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{36}$$

$$-\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 I_1(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{37}$$

が得られる．ここで，$\mathrm{d}Q(t)/\,\mathrm{d}t$ はキャパシタンス中に流れる電流で，

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = I(t) - I_1(t) \tag{38}$$

となる．これを，式 (36) と (37) に代入すると，

$$-\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\left[I(t) - I_1(t)\right] = 0 \tag{39}$$

$$\frac{1}{C}\left[-I(t) + I_1(t)\right] + L\frac{\mathrm{d}^2 I_1(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{40}$$

である．これらの連立方程式をフーリエ変換すると

$$
\begin{aligned}
-i\omega\tilde{V}(\omega)+\frac{1}{C}\left[\tilde{I}(\omega)-\tilde{I}_1(\omega)\right]&=0 &(41)\\
\frac{1}{C}\left[-\tilde{I}(\omega)+\tilde{I}_1(\omega)\right]+L(i\omega)^2\tilde{I}_1(\omega)&=0 &(42)
\end{aligned}
$$

が得られる．この連立方程式から，電源から見たインピーダンスの計算に不要な $\tilde{I}_1(\omega)$ を消去すると，

$$
\frac{1}{C}\left[-\tilde{I}(\omega)-i\omega C\tilde{V}(\omega)+\tilde{I}(\omega)\right]+L(i\omega)^2\left[-i\omega C\tilde{V}(\omega)+\tilde{I}(\omega)\right]=0 \tag{43}
$$

が得られる．整理すると，

$$
\left(1-\omega^2LC\right)\tilde{V}(\omega)-i\omega L\tilde{I}(\omega)=0 \tag{44}
$$

となる．したがって，電源から見たインピーダンスは，

$$
Z(\omega)=\frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{V}(\omega)}=\frac{i\omega L}{1-\omega^2LC} \tag{45}
$$

となる．

電気回路風　通常の電気回路の問題と同じになることを確かめよう．これは並列回路なので，インピーダンスは，

$$
Z=\frac{1}{\dfrac{1}{i\omega L}+i\omega C}=\frac{i\omega L}{1-\omega^2LC} \tag{46}
$$

となる．フーリエ変換を使って求めたインピーダンスと一致する．世の中，うまくできている．

3　課題

3.1　レポート提出要領

期限	2 月 6 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気数学」 課題名「課題　フーリエ変換の応用 2」 提出日 3E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

3.2 課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

[問 1] 教科書 [1] の p.245 の練習問題 IV-2[A] の 2 と 3.

[問 2] 黒板に書いた回路の電源からみたインピーダンス．本日の講義にしたがい，全ての式を書くこと．

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.