フーリエ変換の応用

山本昌志[*]

2007 年 1 月 23 日

概 要

パルス状の正弦波を考えることによりフーリエ変換の性質を学習する．さらに，電気回路にフーリエ変換を応用して，インピーダンスを計算する方法を学ぶ.

1　本日の学習内容

1.1　先週までの復習

1.1.1　フーリエ級数

区間 $[-L, L]$ で定義された関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right] \tag{1}$$

$$\text{ただし，}\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

のようにフーリエ級数で表すことができる．どんな関数でも，$\sin x$ と $\cos x$ の和で表すことができる．

三角関数と指数関数は，オイラーの公式で関係づけることができる．この公式を利用すると，式 (1) は，指数関数で表したフーリエ級数は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi x)/L} \tag{2}$$

$$\text{ただし},c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i(n\pi x)/L}\,\mathrm{d}x$$

1.1.2　フーリエ変換

区間 $[-\infty, \infty]$ で定義された関数 $f(x)$ は，

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}\,\mathrm{d}u \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha \tag{4}$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

とフーリエ変換とフーリエ逆変換を使って表すことができる．もし，関数 $f(x)$ が偶関数であれば，

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u \, \mathrm{d}u \tag{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x \, \mathrm{d}\alpha \tag{6}$$

となる．これは，フーリエ余弦変換と逆フーリエ余弦変換と呼ばれる．一方，関数 $f(x)$ が奇関数であれば，

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u \, \mathrm{d}u \tag{7}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \sin \alpha x \, \mathrm{d}\alpha \tag{8}$$

これは，フーリエ正弦変換と逆フーリエ正弦変換と呼ばれる．

1.2 本日の学習内容

本日の内容は，教科書から離れてる．本日のゴールは次のとおりである．

- フーリエ変換のイメージが分かる．
- フーリエ変換を電気回路に応用できる．

フーリエ積分やフーリエ変換の実用面については，来週の講義で述べる．

2 フーリエ級数とフーリエ変換の関係

2.1 フーリエ級数

フーリエ級数の物理的なイメージを持つために，パルス状の電圧の波を考える．具体例として，周波数 $f_0\,[\mathrm{Hz}]$，パルス幅が $T\,[\mathrm{sec}]$，振幅 V_0 のパルス状の正弦波を考える．

$$V(t) = \begin{cases} V_0 \sin(2\pi f_0 t) = \sin(\omega_0 t) & -T \leqq t \leqq T \\ 0 & t < -T \quad \text{または} \quad T < t \end{cases} \tag{9}$$

と表すことができる．ω_0 は角振動数と呼ばれる量で，$\omega_0 = 2\pi f_0$ の関係がある．周波数 f_0 を使うと式中に 2π がいつも顔をだし，じゃまなので角振動数という量が使われる．

これを，区間 $[-NT, NT]$ としてフーリエ級数を考えよう (図 1)．パルス幅の 1 倍，2 倍,3 倍，10 倍，100 倍と変化させた場合のフーリエ係数を知りたいのである．

このパルス状正弦波は奇関数なので，フーリエ係数の a_n はゼロとなる．いっぽう，b_n は

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{NT} \int_{-NT}^{NT} V(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{NT}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{NT} \int_{-T}^{T} V_0 \sin(\omega_0 t) \sin\left(\frac{n\pi t}{NT}\right) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{10}$$

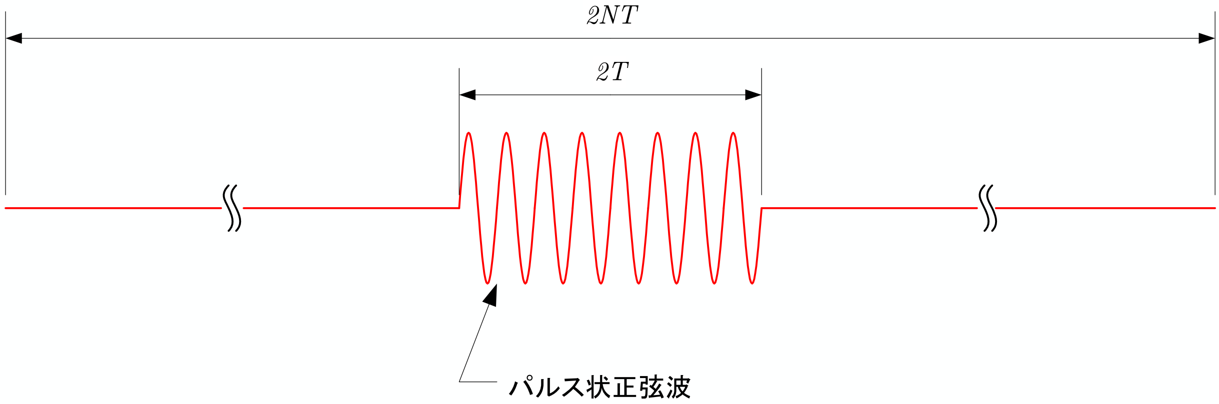

図 1: パルス状の正弦波

の積分より計算できる．ここで，

$$\omega = \frac{n\pi}{NT} \tag{11}$$

とする．すると，フーリエ係数は $b_n \to b(\omega)$ と書き直してもよいだろう．

$$\begin{aligned} b(\omega) &= \frac{1}{NT}\int_{-T}^{T} V_0 \sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} \dfrac{V_0}{N} & \omega_0 = \omega \\ \dfrac{V_0}{NT}\left[\frac{\sin[(\omega_0-\omega)T]}{\omega_0-\omega} - \dfrac{\sin[(\omega_0+\omega)T]}{\omega_0+\omega}\right] & \omega_0 \neq \omega \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

これを角振動数ではなく，より分かり易い周波数に直すと，

$$b(f) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{N} & f_0 = f \\ \dfrac{V_0}{NT}\left[\dfrac{\sin[2\pi(f_0-f)T]}{2\pi(f_0-f)} - \dfrac{\sin[2\pi(f_0+f)T]}{2\pi(f_0+f)}\right] & f_0 \neq f \end{cases} \tag{13}$$

となる．この $b(f)$ を

$$T = 5[\mathrm{msec}] \qquad V_0 = 1[\mathrm{V}] \qquad f_0 = 1[\mathrm{kHz}] \tag{14}$$

として，グラフにすると次のようになる．

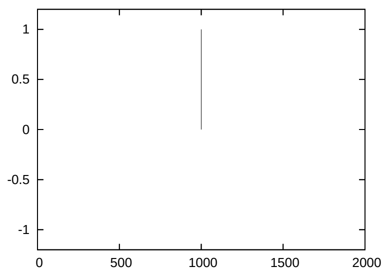

図 2: $N=1$ の場合

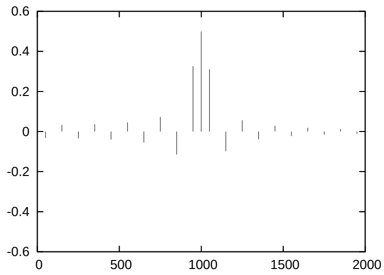

図 3: $N=2$ の場合

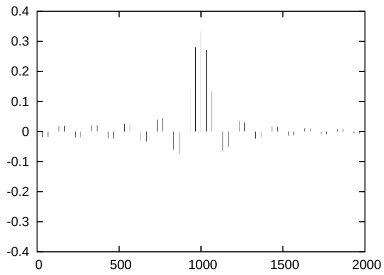

図 4: $N=3$ の場合

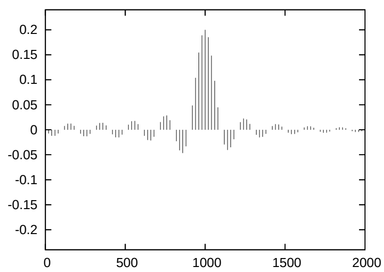

図 5: $N=5$ の場合

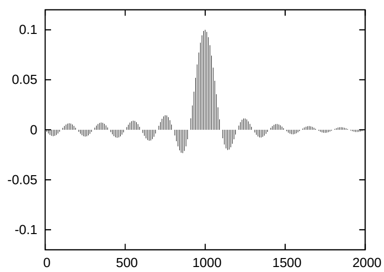

図 6: $N=10$ の場合

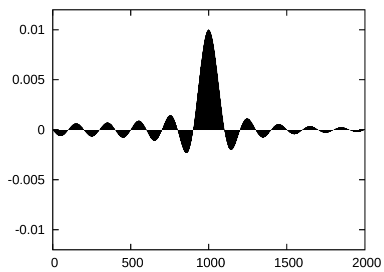

図 7: $N=100$ の場合

このグラフの結果から，次のことが分かる．

- 最もピーク電圧の高い周波数は，1 [kHz] である．これは，正弦波の周波数となっている．
- 電圧がゼロとなる周波数が 100 [Hz] 間隔で表れる．式 (13) から分かるように，これはパルス幅 10 [msec] の逆数である．パルス状の波は，パルス幅と同程度，周波数が拡がることを意味している．これは電気では重要で,「パルス幅の短い波は広いスペクトルを持つ」ということを表している．パルス幅の狭いノイズは広いスペクトルを持つので，フィルターでの減衰が難しくなる．
- 周波数を横軸したピーク電圧は定義している時間幅 N に反比例している．これはパーセバルの等式を考えれば，納得できる．

2.2　フーリエ変換

つぎに，パルス状の正弦波である式 (9) をフーリエ変換する．これは，奇関数なのでフーリエ正弦変換となる．

$$
\begin{aligned}
V(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} V(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} V_0\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} \dfrac{V_0}{\sqrt{2\pi}} & \omega_0 = \omega \\ \dfrac{V_0}{\sqrt{2\pi}}\left[\dfrac{\sin\left[(\omega_0-\omega)T\right]}{\omega_0-\omega} - \dfrac{\sin\left[(\omega_0+\omega)T\right]}{\omega_0+\omega}\right] & \omega_0 \neq \omega \end{cases}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

あるいは，角振動数ではなく，周波数で表示すると，

$$
V(f) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{\sqrt{2\pi}} & f_0 = f \\ \dfrac{V_0}{\sqrt{2\pi}}\left[\dfrac{\sin\left[2\pi(f_0-f)T\right]}{2\pi(f_0-f)} - \dfrac{\sin\left[2\pi(f_0+f)T\right]}{2\pi(f_0+f)}\right] & f_0 \neq f \end{cases}
\tag{16}
$$

となる．これを，

$$
T = 5[\mathrm{msec}] \qquad V_0 = 1[\mathrm{V}] \qquad f_0 = 1[\mathrm{kHz}] \tag{17}
$$

として，グラフにするとつぎのようになる．

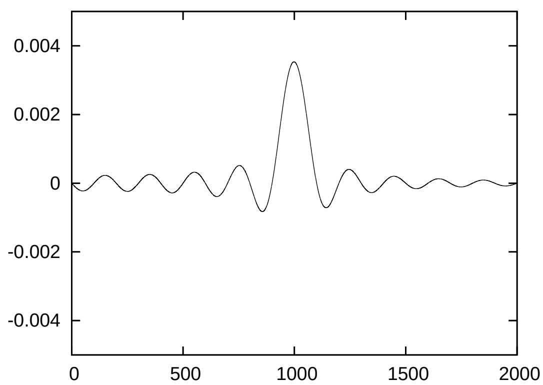

図 8: パルス状の正弦波のフーリエ変換

2.2.1　縦軸と横軸

フーリエ変換の図 2〜7 の横軸は，周波数である．縦軸は，電圧となっている．横軸は周波数である．このことは，式 (13) から分かる．

フーリエ変換の図 8 はどうであろうか?．横軸は明らかに周波数である．縦軸の次元は，V/Hz となっている．これについては，式 (16) から分かる．

2.3 結論

フーリエ変換は，時間情報を周波数情報に変換している．すなわち，時刻の関数で振幅が $f(t)$ が分かったとすると，周波数 (角振動数) の関数でその振幅 $F(\omega)$ がわかる．

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{18}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

3 電気回路に応用

3.1 導関数のフーリエ変換

導関数のフーリエ変換は，非常に重要で電気の問題にしばしば表れる．多分，諸君は知らないうちにそれを使っている．ここで，ちゃんとした話としておこう．

導関数 $f'(t)$ のフーリエ変換を $g(\omega)$ とする．部分積分を利用すると，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{21}$$

が得られる．自然界の物理量 f は，$f(-\infty) = f(\infty) = 0$ である．したがって，この式の第一項は，ゼロに収束し，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t = i\omega F(\omega) \tag{22}$$

となる．ようするに導関数のフーリエ変換は，元の関数の $-i\omega$ 倍である．n 階の導関数でも同様に，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t = (i\omega)^n F(\omega) \tag{23}$$

となる．

3.2 RL 回路

図 9 の RL 直列回路のインピーダンスを考える．インダクタンスを L，レジスタンスを R とした場合のキルヒホッフの法則は，

$$V(t) - RI(t) + L \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{24}$$

となる．ただし，電源の電圧は電流の流れる方向を正としている．電源電圧は時間とともに変化する．それにしたがい回路に流れる電流も変化する．これの両辺に $e^{i\omega t}/\sqrt{2\pi}$ を乗じて区間 $[-\infty,\infty]$ で積分を行う．

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} V(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} RI(t)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} 0e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

式 (23) を使って，整理すると

$$\tilde{V}(\omega) - R\tilde{I}(\omega) - i\omega L\tilde{I}(\omega) = 0 \tag{26}$$

となる．ここで，$\tilde{V}(\omega)$ は $V(t)$ のフーリエ変換，$\tilde{I}(\omega)$ は $I(t)$ のフーリエ変換である．電源から見た回路のインピーダンス—周波数の関数—は

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} \tag{27}$$

と定義できる．したがって，図 9 の電源から見たインピーダンスは，式 (25) より，

$$Z(\omega) = R + i\omega L \tag{28}$$

となる．電気回路でいつも見る式である．諸君は知らず知らずのうちにフーリエ変換を使っていたのである．

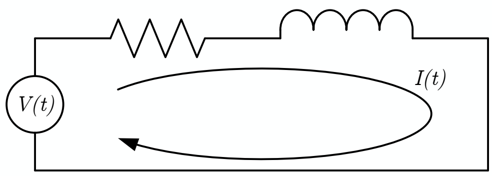

図 9: RL 直列回路

4　課題

4.1　レポート提出要領

期限	1 月 30 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気数学」 課題名「課題　フーリエ変換の応用」 提出日 3E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

4.2 課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

[問 1] 教科書 [1] の p.224–225 の練習問題 IV-2[A] の 1(2) と (2).

[問 2] フーリエ変換を利用して，インダクタンスのインピーダンスが $i\omega L$ であることを示せ.

[問 3] フーリエ変換を利用して，キャパシタンスのインピーダンスが $-\frac{i}{\omega C}$ であることを示せ.

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.