フーリエ積分とフーリエ変換

山本昌志*

2007年1月16日

概 要

定義域が $[-\infty, \infty]$ にまでひろがり，周期性を持たない関数のフーリエ級数を考える．これを拡張してフーリエ積分を導入する．また，フーリエ積分からフーリエ変換を示す．

1 本日の学習内容

本日の内容は，教科書 [1] の p.239–244 ページである．本日の講義では，以下を目指す．

- フーリエ積分の公式の導きかたが分かる．
- フーリエ変換の公式の導きかたが分かる．

フーリエ積分やフーリエ変換の実用面については，来週の講義で述べる．

2 フーリエ積分

2.1 フーリエ級数

これまで学習してきたように，次のような関数はフーリエ級数で表すことができる．

- 周期的に繰り返す関数
- 有限な区間で定義された関数

例えば，周期 $2L$ あるいは区間 $[-L, L]$ で定義された関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right] \tag{1}$$

$$\text{ただし，}\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

のようにフーリエ級数で表すことができる．

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

2.2　フーリエ積分

先に示したように，フーリエ級数は有限な区間 $[-L, L]$ で定義された関数を表すことができる．それを無限の区間 $[-\infty, \infty]$ に拡張することを考える．ここでは，有限な L の式から出発して，それを $L \to \infty$ にする．式 (1) の $f(x)$ に a_n と b_n を代入すると，

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}\,\mathrm{d}u + \sin\frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}\,\mathrm{d}u\right] \tag{2}$$

が得られる．ここで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \text{有限の値} \tag{3}$$

とするならば，式 (2) の右辺の第一項はゼロに収束する[1]．なぜならば，$1/L$ の係数が無限小になるからである．つぎに，

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \tag{4}$$

$$\mathit{\Delta}\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \tag{5}$$

とおく．すると，$L \to \infty$ は $\mathit{\Delta}\alpha \to 0$ となる．したがって，$L \to \infty$ の場合の式 (2) は，

$$f(x) = \lim_{\mathit{\Delta}\alpha\to 0}\frac{\mathit{\Delta}\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(\alpha_n x)\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(\alpha_n u)\,\mathrm{d}u + \sin(\alpha_n x)\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(\alpha_n u)\,\mathrm{d}u\right] \tag{6}$$

となる．ここで，

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,\mathrm{d}u \tag{7}$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\alpha u\,\mathrm{d}u \tag{8}$$

とおく．すると，式 (6) は，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{\mathit{\Delta}\alpha\to 0}\mathit{\Delta}\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(\alpha_n x)A(\alpha_n) + \sin(\alpha_n x)B(\alpha_n)\right] \\
&= \lim_{\mathit{\Delta}\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(\alpha_n x)A(\alpha_n)\mathit{\Delta}\alpha + \sin(\alpha_n x)B(\alpha_n)\mathit{\Delta}\alpha\right] \\
&= \lim_{\mathit{\Delta}\alpha\to 0}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n)\cos(\alpha_n x)\mathit{\Delta}\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} B(\alpha_n)\sin(\alpha_n x)\mathit{\Delta}\alpha\right]
\end{aligned} \tag{9}$$

となる．この右辺はリーマン和の極限—普通の積分—の形になっている．したがって，

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\alpha)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{\infty} B(\alpha)\sin\alpha x\,\mathrm{d}\alpha \tag{10}$$

[1] 教科書 [1] では，$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|$ が有限確定ならばゼロに収束すると書いてある．このことは正しいが，これまでの議論ではそのようなことは分からない．教科書はちょっと言い過ぎであろう．参考文献 [2] などにはきちんとした証明がある．

と書くことができる．これまでの話をまとめると，次のようになる．

フーリエ積分 1

区間 $[-\infty,\infty]$ で定義された関数 $f(x)$ は，次のフーリエ積分で表すことができる．

$$f(x)=\int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha+\int_0^\infty A(\alpha)\sin\alpha x\,\mathrm{d}\alpha$$

ただし，

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos(\alpha u)\,\mathrm{d}u$$
$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin(\alpha u)\,\mathrm{d}u$$

つぎに，式 (7) と式 (8) を式 (10) に代入すれば，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha u\,\mathrm{d}u\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha+\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\alpha u\,\mathrm{d}u\sin\alpha x\,\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left[\cos\alpha u\cos\alpha x+\sin\alpha u\sin\alpha x\right]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

三角関数の加法定理を使うと

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha \tag{11}$$

がえられる．これもフーリエ積分である．

フーリエ積分 2

区間 $[-\infty,\infty]$ で定義された関数 $f(x)$ は，次のフーリエ積分で表すことができる．

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha \tag{12}$$

2.3 フーリエ積分 (指数関数形)

式 (11) から，指数関数を用いたフーリエ積分を求める．その計算をするときに，オイラーの公式より導くことができる．ここでは，

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \tag{13}$$

を用いる．

この式を使うと，式 (11) は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\alpha(x-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)\frac{e^{i\alpha(x-u)}+e^{-i\alpha(x-u)}}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{-i\alpha(x-u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

右辺第二項を $\alpha \to -\alpha$ と変数変換する．すると，$\mathrm{d}\alpha \to -\mathrm{d}\alpha$，$\infty \to -\infty$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\infty} \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned} \tag{14}$$

この式は，一般には次のように変形されて使われることが多い．

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha(x-u)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)e^{i\alpha x}e^{-i\alpha u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(u)e^{-i\alpha u}\,\mathrm{d}u\right] e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned} \tag{15}$$

この式もまた，フーリエ積分の別の形である．他のフーリエ積分に比べると式が単純であること，また次のフーリエ変換との関係が深いことから，これがもっとも重要である．

フーリエ積分 3

区間 $[-\infty, \infty]$ で定義された関数 $f(x)$ は，次のフーリエ積分で表すことができる．

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(\alpha)e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha \\
F(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(u)e^{-i\alpha u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

2.4　注意

ここまでの話は，教科書 [1] の p.239–242 に対応する．しかし，教科書では等号 (=) を使わずに，正確でないがまあ良かろうという意味で記号 $\sim$ を使っている．配布したプリントでは，いきなり等号 (=) を使っている．近似記号 ($\sim$) を等号 (=) に直すためには，教科書 [1] の定理 4 が必要ということである．これが必要な理由は，私は分からない．不連続点の取扱いを定めたものと考えて,「こんなものか」という程度にとどめるのが良いだろう．直感的に正しそうで，なにもそんなに不思議なことはない．このあたりはフーリエ級数と同じ．

3　フーリエ変換

3.1　フーリエ変換

技術者にとって，フーリエ積分よりもフーリエ変換の方が重要である．指数関数形で書かれたフーリエ積分は,

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} \,\mathrm{d}u \tag{16}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} \,\mathrm{d}\alpha \tag{17}$$

である．式 (16) は**フーリエ変換** (Fourier transform)，式 (17) は**逆フーリエ変換** (inverse Fourier transform) と呼ばれる．

これらの二つの式はよく似ているが，指数関数の符号が異なり完全に対称ではない．

フーリエ変換と逆フーリエ変換の両方の式には，係数 $1/\sqrt{1\pi}$ がかかっている．この式の導出過程からも分かるように，どちらか一方に $1/(2\pi)$ をかけるだけでもよい．そののうに記述した教科書も多い．どちらでも良いのある．

3.2　フーリエ余弦変換とフーリエ正弦変換

フーリエ変換を表す式 (16) や式 (17) はオイラーの公式を使って,

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)(\cos\alpha u - i\sin\alpha u) \,\mathrm{d}u \tag{18}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)(\cos\alpha x + i\sin\alpha x) \,\mathrm{d}\alpha \tag{19}$$

と書き換えることができる．

フーリエ余弦変換　もし，関数 $f(x)$ が偶関数であれば，式 (18) は

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos\alpha u \,\mathrm{d}u \tag{20}$$

となる．なぜならば，$\sin\alpha u$ の項は偶関数と奇関数の積分でその値はゼロとなり，積分に寄与しないからである．そして，この $F(\alpha)$ も偶関数となる．$F(-\alpha)=F(\alpha)$ となるからである．したがって，逆フーリエ変換は，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\cos\alpha x\,\mathrm{d}\alpha \tag{21}$$

となる．関数 $f(x)$ が偶関数の場合のこれらの変換を**フーリエ余弦変換**と呼ぶ．

フーリエ正弦変換　もし，関数 $f(x)$ が奇関数であれば，式 (18) は

$$F(\alpha)=-i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\alpha u\,\mathrm{d}u \tag{22}$$

となる．この $F(\alpha)$ は奇関数である．したがって，逆フーリエ変換は，

$$f(x)=i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\sin\alpha x\,\mathrm{d}\alpha \tag{23}$$

となる．これらの変換には虚数単位の i があり，みっともない．そこで，

$$\frac{F(\alpha)}{-i}=iF(\alpha)\rightarrow F(\alpha) \tag{24}$$

と変数変換する．すると，

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin\alpha u\,\mathrm{d}u \tag{25}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\sin\alpha x\,\mathrm{d}\alpha \tag{26}$$

となる．関数 $f(x)$ が偶関数の場合のこれらの変換を**フーリエ正弦変換**と呼ぶ．

4　課題

4.1　レポート提出要領

期限	1 月 23 日 (火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙	A4 のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 　授業科目名「電気数学」 　課題名「課題　フーリエ積分とフーリエ変換」 　提出日 　3E　学籍番号　氏名
内容	2 ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

4.2 課題内容

以下の問題では，計算過程は省略しないで全て書くこと．

[問 1] 教科書 [1] の p.239–244 を 3 回読め．

[問 2] フーリエ積分の式 (15) を導け．

[問 3] フーリエ変換の式 (16) と式 (19) を導け．

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.

[2] 一松信. 解析学序説　上巻. 裳華房, 1978.