フーリエ級数の性質

山本昌志*

2006 年 12 月 18 日

概 要

フーリエ級数の不連続点での値，項別微分と積分を学習する．さらに，パーセバルの等式と誤差の関係も学習する．

1　前回の復習と本日の内容

本日の内容は，教科書 [1] の p.231–236 ページである．ここでは，フーリエ級数のさまざまな性質を学習する．本日の学習の目標は，つぎのとおりである．

- 不連続点での値が分かる．
- 項別微分と積分が分かる．
- パーセバルの等式の意味がわかる．

2　区分的に連続

2.1　不連続部分の値

区分的に連続ということを考える前に，不連続部分でのフーリエ級数の値について考える．一般的な話は難しいので，具体的な以下の関数を考えることにする．

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (-\pi \leqq x \leqq 0)\\ \sin(x) & (0 \leqq x \leqq \pi)\end{cases} \tag{1}$$

付録 A に示すように，このフーリエ級数は，

$$f(x)=\frac{2-\pi}{2\pi}+\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}\cos nx+\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx\right] \tag{2}$$

となる．これを $n=10000$ まで，コンピューターにより計算した結果を図 1 に示す．

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

ここで，不連続点 $x=0$ での $f(x)$ の値を考える．式 (2) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{2-\pi}{2\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \right] \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[1 + \left(\frac{2}{1-2^2} + \frac{2}{1-4^2} + \frac{2}{1-6^2} + \frac{2}{1-8^2} + \cdots \right) \right] \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1-(2n)^2} \right] \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-(2n)} + \frac{1}{1+(2n)} \right\} \right] \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[1 + \frac{1}{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{-3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{-5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{-7} + \frac{1}{9} + \cdots \right] \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となる．これは，何を表しているか?．不連続点では，その両端での相加平均となっていることを表している．この例では，左から $x=0$ に近づく場合は $f(0-0)=-1$，右から近づく場合は $f(0+0)=0$ となり，$x=0$ では相加平均となっている．

$$
f(0) = \frac{1}{2}\left[f(0+0)+f(0-0)\right] \tag{4}
$$

不連続点を含む関数をフーリエ級数で表した場合，$x=p$ の不連続点での値は

$$
f(p) = \frac{1}{2}\left[f(p-0)+f(p+0)\right] \tag{5}
$$

となる．

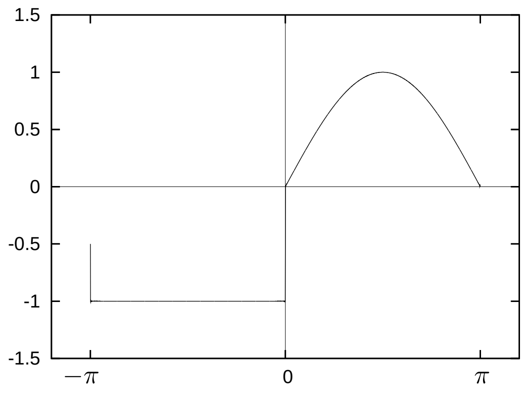

図 1: $f(x)=-1 \quad (-\pi \leqq x \leqq 0)$,$f(x)=\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ を 10000 項までフーリエ級数を計算した結果．

物言い　「たしかに，この例では不連続点での値は両端の相加平均となっている．それが一般的に成り立つか保証はあるのか?」．なかなか，良い指摘である．この証明をこの講義でする時間はない．さらに，いろいろなことを学ばないとそれが理解できないであろう．したがって，直感的には正しそうなので，そんなものと思ってほしい．事実，不連続点での値はこれで正しいのである．納得できなければ，各自，数学の教科書を調べよ．

このように不連続部分でも値がちゃんと存在することは重要である．有限区間で定義された関数 $f(x)$ が不連続部分や関数の両端で値があるとき，その関数は**区分的に連続**という．

2.2　項別微分と項別積分

フーリエ級数の両辺を微分しても積分しても，その等号の関係は成り立つ．とくに，三角関数の和の部分は項別に微分や積分ができる．これはいままで計算した普通の関数と同じである．

3　パーセバルの等式

3.1　証明

これまで学習したように，区間 $[-L, L]$ で定義された区分的に連続な関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right] \tag{6}$$

$$\text{ただし，}\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

のようにフーリエ級数で表すことができる．式 (6) の両辺に $f(x)$ を乗じて[1]，関数が定義されている区間で積分を行う[2]．

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-L}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right] f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\right] \\
&\qquad \text{式 (6) の } a_n \text{ と } b_n \text{ の計算式により} \\
&= L\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(La_n^2 + Lb_n^2\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

以上より，

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{8}$$

[1] 両辺を二乗して積分しても同じ結果が得られる．

[2] 本当はここで項別積分についての面倒な話 (教科書 [1] の p.233 定理 2) があるのだが，気にしないことにする．今まで学習してきた通り，ここでも項別の積分ができるものとする．

が得られる．これを**パーセバルの等式**と言う．

諸君は,「計算結果は分かった．この計算結果にどんな意味があるの???」と言いたいだろう．パーセバルの等式が重要な理由は，節を変えて述べる事にする．

3.2 パーセバルの等式の意味

「パーセバルの等式は関数を展開するときのピタゴラスの定理 (三平方の定理) である」と言ったら驚くであろう．これからこのことを示す．これから述べることの計算なんかどうでもよいから，イメージを持つことに努めよ．

3.2.1 ベクトルの場合のピタゴラスの定理

図 2 のように，ある任意のベクトルは x と y，z 方向に分解できる．分解されたそれぞれのベクトルは，各方向の単位ベクトルの a 倍や b 倍，あるいは c 倍というように表現できる．すなわち，

$$\boldsymbol{X} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} \tag{9}$$

である．ここで，$\boldsymbol{i}$ は x 方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{j}$ は y 方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{k}$ は z 方向の単位ベクトルである．これは，ベクトル $\boldsymbol{X}$ を単位ベクトル $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ で展開しているのである．その展開の係数が (a, b, c) で，それぞれの単位ベクトルの寄与を表す．これを，

$$\boldsymbol{X} = (a,\, b,\, c) \tag{10}$$

と表すことが多い.，線形代数では

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{11}$$

のように表現したりもする．

この式をつかって自分自身の内積を計算する．左辺は $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X} = |\boldsymbol{X}|^2$ となり，ベクトルの大きさの二乗—長さの二乗—である．右辺も計算すると，次のようになる．

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{X}|^2 &= (a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k})\cdot(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}) \\ &= a^2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) + ab(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}) + ac(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}) + ba(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}) + b^2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}) + bc(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}) + ca(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}) + cb(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}) + c^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

単位ベクトルは直交しているので，$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) = 1$，$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}) = 0$

$$= a^2 + b^2 + c^2 \tag{12}$$

これは，まさにピタゴラスの定理である．

注意ここではめんどくさい計算を行ったが，普通は次のようにする．

$$|\boldsymbol{X}|^2 = (a,\, b,\, c)\cdot(a,\, b,\, c) = a^2 + b^2 + c^2 \tag{13}$$

あるいはもう少し線形代数の規則に従うと

$$|\boldsymbol{X}|^2 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 \tag{14}$$

とする．どっちでもいい．

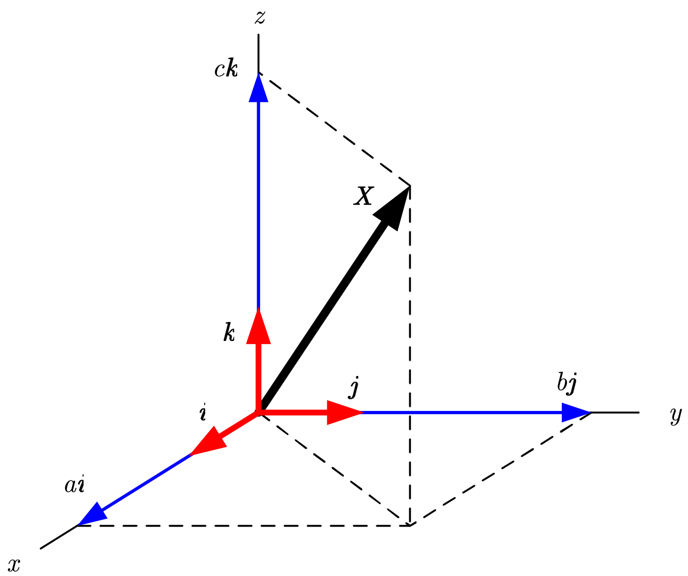

図 2: 3 次元のベクトルを単位ベクトルで分解

3.2.2　関数のピタゴラスの定理

「関数のピタゴラスの定理」という言葉は無いが，イメージをつかむために，ここではあえて使う[3]．

準備　先ほどのピタゴラスの定理を示すときに，ベクトル $\boldsymbol{X}$ を単位ベクトル $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ で展開[4]した．それぞれの単位ベクトルの強度を示すものが係数の (a, b, c) である．同様に，フーリエ級数では，関数 $f(x)$ を $\{1, \cos(\pi x/L), \cos(2\pi x/L), \cdots, \sin(\pi x/L), \sin(2\pi x/L), \cdots\}$ で展開[5]した．展開に用いた三角関のそれぞれの強度は，係数 $(a_0/2, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \cdots)$ が示すことになる．

つぎに，ベクトルの内積の演算に対応する関数の演算について考える．これは以前述べたように，積分になる．

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-L}^{L} \phi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

[3] ちゃんとした数学の先生には怒られるが，カンベンしてほしい.「この授業は電気数学で工学だ!!」とひらきなおる．
[4] 基底ベクトルと言う．
[5] 基底関数と言う．

単位ベクトルでは，次式で表せる直交性

$$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) = 1 \tag{16}$$

$$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}) = 0 \tag{17}$$

がある．自分自身以外の内積はゼロとなっている．これに対応する三角関数の直交性は，次のようになる．

$$\int_{-L}^{L} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} L & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{18}$$

$$\int_{-L}^{L} 1 \times 1 \,\mathrm{d}x = 2L \tag{19}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \cos nx \,\mathrm{d}x = 0 \tag{20}$$

これもまた，自分自身以外との積分はゼロとなる．単位ベクトルとよく似ている．ただし，単位ベクトルの大きさは 1 であったが，展開する定数や関数の大きさは $\sqrt{2L}$ あるいは $\sqrt{L}$ である．

ピタゴラスの定理　準備ができたので，パーセバルの等式がピタゴラスの定理と同じであることを示す．はじめに，パーセバルの等式 (8) をほんのちょっと書き直す．

$$\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \left(\frac{\sqrt{2L}a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{L}a_n\right)^2 + \left(\sqrt{L}b_n\right)^2\right] \tag{21}$$

ピタゴラスの定理である式 (12) の右辺と式 (21) とは次のように対応する．

$$|\boldsymbol{X}|^2 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x \tag{22}$$

左側は自分自身との内積，右側は自分自身との積分である．

次に右辺であるが，単位の大きさを考えなくてはならない．

- ベクトルの場合，大きさが 1 の単位ベクトルを基準にして，何倍という意味で係数 $(a,\,b,\,c)$ を決めた．
- 関数の場合，大きさが $\sqrt{2L}$(定数 1) あるいは $\sqrt{L}$(三角関数) を基準にして，何倍と言う意味で係数 $(a_0,\,a_n,\,b_n)$ を決めた．

関数の方の法の単位が 1 と異なるため，それを 1 にしなくてはならない．単位を 1 にすると，係数は $\sqrt{2L}$ あるいは $\sqrt{L}$ 倍する必要がある．なぜならば，「2[mm] 単位の 3 倍の長さは，1[mm] 単位の 2×3 倍になる」からである．したがって，ベクトルと関数，それぞれ大きさが 1 のもので展開した場合の対応は次のようになる．

$$(a,\,b,\,c) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\sqrt{2L}a_0}{2},\,\sqrt{L}a_1,\,\sqrt{L}a_2,\cdots,\sqrt{L}a_1,\,\sqrt{L}a_2\right) \tag{23}$$

ベクトルの場合の式 (12) の右辺は，1 を単位としたときの直角方向の成分の大きさの二乗和となっている．同様に，パーセバルの等式 (21) も 1 を単位としたときの直角方向の成分の大きさの二乗和となっている．

以上の議論から，パーセバルの等式がピタゴラスの定理と等価であることが分かる．

3.3　ベッセルの不等式と誤差

展開する三角関数を無限大まで取らずに途中で打ち切った場合を考える．現実問題，これはしばしば起こることである．展開の係数が解析的に計算できない場合，コンピューターを使った数値計算を行うことになる．コンピューターでは無限を取り扱うことができないため，有限の数の三角関数で展開しなくてはならない．展開する三角関数の数を多くすればより正確に元の関数を表現できるが，計算時間がさらに必要となる．そこで，展開する関数の数と誤差の関係がわかれば，必要な展開ができる．この問題を考える．

区間 $[-L, L]$ で定義された関数 $f(x)$ を有限な数の三角関数で展開する．すなわち，

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right] \tag{24}$$

である．この場合のパーセバルの等式は，

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x \geqq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \tag{25}$$

のような不等式になる．なぜならば，無限大まで計算するパーセバルの等式の右辺は二乗和であるため，全ての項はゼロよりも大きい．したがって，途中までで展開を打ち切ると，右辺は必ず左辺よりも小さくなる．式 (25) を**ベッセルの不等式**と言う．

ここで，k 項までのフーリエ級数の誤差の二乗の積分 E を考える．

$$\begin{aligned} E &= \frac{\int_{-L}^{L} \left[f(x) - \bar{f}(x) \right]^2 \,\mathrm{d}x}{\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\int_{-L}^{L} \left[\sum_{n=k+1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right\} \right]^2 \,\mathrm{d}x}{\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x} \\ &= \frac{L \sum_{n=k+1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}{\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x} \\ &= \frac{f(x)^2 - L\left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n^2 + b_n^2) \right\}}{\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x} \end{aligned} \tag{26}$$

ある有限な項まででフーリエ級数の計算を打ち切った時の誤差をあたえる式である．有限の項数でフーリエ級数を計算する場合，誤差を見積もる有用な式となる．この式の右辺は，途中でフーリエ級数の計算を打ち切っても評価が可能な量である．

4　課題

4.1　レポート提出要領

期限	1月16日(火) AM 8:50(講義開始前に手渡し OK．講義終了後はダメ)
用紙	A4のレポート用紙．左上をホッチキスで綴じて，提出のこと．
提出場所	山本研究室の入口のポスト
表紙	表紙には以下の項目を分かりやすく記述すること． 授業科目名「電気数学」 課題名「課題　フーリエ級数の性質」 提出日 3E　学籍番号　氏名
内容	2ページ以降に問いに対する答えを分かりやすく記述すること．

4.2　課題内容

教科書 [1] の p.237–238 の演習問題 IV-I

付録 A　図 1 のフーリエ級数の計算

間に合わなかったので，そのうち WEB に載せる．定義にしたがって，積分を行っているだけである．

参考文献

[1] 矢野健太郎, 石原繁. 解析学概論 (新版). 裳華房, 2000.