試験問題 (生産システム工学専攻 電気磁気学特論)

生産システム工学専攻　　学籍番号　　　　　氏名

1 必須問題

[問 1] $\boxed{20\text{点}}$ コンデンサーの片側の電極の電荷量 Q と電圧 V、静電容量 C には、

$$Q = CV$$

の関係がある。これを使って電荷量を求めることになる。そこで、コンデンサーの内側の電極 (半径 a) に Q の電荷、外側の電極 (半径 b) に $-Q$ の電荷があるとする。この状態で電圧 (ポテンシャル) を求めて、静電容量を求めることにする。

この場合も、電圧は電場を積分する事により求めるのが簡単である。問題が、全て球形なので極座標系を用いることにする。内側と外側の電極間に生じる電場は、対称性により

$$E_\theta = 0 \qquad\qquad E_\varphi = 0$$

となり、E_r を求めることに問題は帰着される。これは、積分形のガウスの法則を用いることにより容易に計算できる。内側と外側の間に同心の球の領域を考え、この法則を適用する。電場の積分は、

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_r \qquad a \le r \le b$$

となる。一方、電荷密度の積分は

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

この右辺と左辺は等しいので、電極間の電場は

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad a \le r \le b$$

となる。

これから電極間の電位差は、この電場を積分することにより求められる。積分の結果は

$$\begin{aligned}
V(a) - V(b) &= -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}
\end{aligned}$$

となる。

最初に示した、電圧と電荷量、静電容量の関係式から、

$$\begin{aligned}
C &= \frac{Q}{V} \\
&= Q\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q}\frac{ab}{b-a} \\
&= \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}
\end{aligned}$$

となる。

[問 2] $\boxed{20\text{点}}$ n 個直列につないだ場合は、$n\phi^e$ の電圧が nr の抵抗と R の抵抗に印可されたと考える。したがって、この場合、流れる電流は、

$$I = \frac{n\phi^e}{nr + R}$$

となる。
並列につないだ場合の抵抗 R に流れる電流を I とする。すると、各電池に流れる電流は I/n となる。オームの法則とキルヒホッフの法則を使うと、

$$\phi^e - \frac{I}{n}r - IR = 0$$

となる。これから、電流は、

$$I = \frac{n\phi^e}{r+nR}$$

となる。

[問 3] $\boxed{\textit{20 点}}$ 軸対称問題なので，円柱座標系を使うのが簡単である．電流があるときの静磁場は，アンペールの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

を用いると簡単に計算できる．円柱状の導体内部の電流密度 $\boldsymbol{j}$ は，$I/\pi a^2$ である．当然，導体外部では $\boldsymbol{j} = 0$ となる．
アンペールの法則をストークスの定理を用いて，積分形に書き改めると，

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \ell = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}S$$

となる．円柱の中心を $r = 0$ として，円柱の内部と外部でこれを積分することを考える．当然，磁場は円柱座標系の r 方向成分 B_r のみである．従って，積分は，

$$2\pi r B_r = \begin{cases} \mu_0 \pi r^2 \dfrac{I}{\pi a^2} = \mu I \dfrac{r^2}{a^2} & 0 \le r \le a \text{ の場合} \\ \mu_0 I & a \le r \text{ の場合} \end{cases}$$

となる．これから，磁束密度は，

$$B_r = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & 0 \le r \le a \text{ の場合} \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & a \le r \text{ の場合} \end{cases}$$

と求められる．

[問 4] $\boxed{\textit{20 点}}$ コイルを貫く磁束 ϕ は、

$$\begin{aligned} \phi &= \int_S B\mathrm{d}S \sin(\omega t + \theta_0) \\ &= BS \sin(\omega t + \theta_0) \end{aligned}$$

と書ける。コイル 1 周に発生する電圧 V は、

$$\begin{aligned} V &= \oint \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\ &= \int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\ &= \int_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \phi \mathrm{d}S \\ &= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

となる。フラックス ϕ は、最初に示した式を使う。すると、

$$V = -\omega BS \sin(\omega t + \theta_0)$$

と電圧を求めることができる。電流はオームの法則 $V = IR$ より

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{R} \\ &= -\frac{\omega BS \sin(\omega t + \theta_0)}{R} \end{aligned}$$

となる。電流の最大値は、$\omega BS/R$ となり、それぞれ値を代入すると、1.5[A] になる。

[**問 5**] $\boxed{\textit{20}\,点}$ 微分形のマクスウェルの方程式は、以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

ガウスの定理とストークスの定理は,

$$
\begin{aligned}
&\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S && \text{ガウスの定理} \\
&\int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \mathrm{d}S = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\ell && \text{ストークスの定理}
\end{aligned}
$$

である。

マクスウェルの方程式の 1 番目の式の両辺を体積積分を行い、ガウスの定理を使うと

$$
\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \int_V \rho \mathrm{d}V \qquad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \qquad \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \rho \mathrm{d}V
$$

となり、積分形のガウスの法則が得られる。

同じことをマクスウェルの方程式の 2 番目の式に施すと

$$
\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V = 0 \qquad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \qquad \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0
$$

が得られる。これが磁場に関する積分形のガウスの法則である。

次に、マクスウェルの方程式の番目の式に面積積分を行い、ストークスの定理を使うと

$$
\int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \int_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) \mathrm{d}S \quad \text{ストークスの定理} \Rightarrow \quad \int_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S
$$

が得られる。これは、積分形で表したファラデーの電磁誘導の法則である。

最後は、マクスウェルの方程式の 4 番目の式に同じようにストークスの定理を応用すると

$$
\int_S \nabla \times \boldsymbol{H} \mathrm{d}S = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}S \quad \text{ストークスの定理} \Rightarrow \quad \int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S
$$

が得られる。これは、積分形のアンペール-マクスウェルの法則である。