# 試験問題 (生産システム工学専攻 電気磁気学特論)

生産システム工学専攻　　学籍番号　　　　　氏名

## 1　必須問題

**[問 1]** $\boxed{20\text{点}}$ 球殻の中心を原点とした球座標を考える．この原点を中心として，全ては対称なので，電場の成分のうち，$E_r$ のみ値を持つことができ，他の成分はゼロとなる．$E_r$ を求めるために，積分形のガウスの法則

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho\mathrm{d}V$$

を使うことになる．この式を適用する領域を，この球殻を中心にした球状にすると積分は簡単になる．電場を求める位置 $r$ とすると，ガウスの式の左辺は，

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_r$$

となる．積分領域の球の表面では，電場 $E_r$ は一定で，積分領域の法線方向と一致するためである．一方，右辺は

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho\mathrm{d}V = \begin{cases} 0 & r \leq a \text{ のとき} \\ \dfrac{Q}{\varepsilon} & a \leq r \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．したがって，

$$4\pi r^2 E_r = \begin{cases} 0 & r \leq a \text{ のとき} \\ \dfrac{Q}{\varepsilon} & a \leq r \text{ のとき} \end{cases}$$

である．これから，球殻の内外の電場は，

$$E_r = \begin{cases} 0 & r \leq a \text{ のとき} \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & a \leq r \text{ のとき} \end{cases}$$

となる．

**[問 2]** $\boxed{20\text{点}}$ 導線 a,b が一番上にあるとき $x = 0$ とする座標を選び，下に向かうとそれが増加するようにする．すると回路が囲む面積 $S$ は，$x\ell$ となる．ここを貫く，フラックスは $\phi = x\ell B$ となる．抵抗は，導線 a,b のみなので，その間の電圧は，

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \\ &= -\ell B v \end{aligned}$$

である．これから，回路に流れる電流は

$$I = -\frac{\ell B v}{R} \tag{1}$$

となる．

この電流が流れることにより，ローレンツ力が発生することになる．ローレンツ力は，$qvB$ となるが，

電荷密度 $\rho$ と導線の断面積 $S$ と長さ $\ell$ を考えると

$$
\begin{aligned}
F &= qvB \\
&= \int \rho v B \mathrm{d}V \\
&= \rho v B S \ell \\
&\quad \rho v S = I \text{ なので} \\
&= I B \ell
\end{aligned}
$$

と書くことができる．終速度に達した場合，このローレンツ力と重力による力が釣り合うので，$mg + Iv\ell = 0$ となる．電流は分かっているので，終速度は，

$$
v = \frac{Rmg}{B^2 \ell^2}
$$

となる．

**[問 3]** $\boxed{20\text{ 点}}$ 自由空間では，電流や電荷はない．したがって，マクスウェルの方程式の中で，$\rho = 0$，$\boldsymbol{j} = 0$ とすればよい．すると，自由空間での電磁場を表すマクスウェルの方程式

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\
&\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \\
&\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0
\end{aligned}
$$

が得られる．

この式のうち 3 番目のものの両辺に回転の演算子を作用させると，

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \\
&\qquad \text{マクスウェルの方程式の 4 番目の式) より} \\
&= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

となり，電場のみの式にできる．ここで，右辺第一項であるが，これはベクトル恒等式 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ を使い，

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
&\qquad \text{マクスウェルの方程式の 1 番目の式より} \\
&= -\nabla^2 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

と変形できる．これで，電場のみの式となった．

同様のことを磁場について行う．マクスウェルの方程式の 4 番目の式の両辺の回転の演算子を作用させると

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E}) \\
&\qquad \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \text{とマクスウェルの方程式の 3 番目の式より} \\
&= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
&\qquad \text{マクスウェルの方程式の 2 番目の式より} \\
&= -\nabla^2 \boldsymbol{B} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

が得られる．

以上の操作により得られた電場と磁場の式を整理すると,

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$
$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

が得られる.

## 2　選択問題

選択した番号を記述した後，問いに答えること．

［**問** 1］ $\boxed{\textit{20}\,\text{点}}$ 対称性により、電場は、

$$E_\theta = 0 \qquad\qquad E_z = 0$$

となり、値を持つのは $E_r$ のみである。この電場を積分形のガウスの法則を用いて計算する。積分の領域を、長さ $L$、半径 $r$ の円筒した場合，

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 2\pi r L E_r$$

となる。円筒の上下のふたの部分は、$E_z = 0$ のため、積分はゼロになる。一方、$r \leq a$ の場合、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^L \mathrm{d}z\int_0^r \frac{3Q(r-a)}{\pi a^3} r\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi L}{\varepsilon_0}\frac{3Q}{\pi a^3}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{ar^2}{2}\right]_0^r \\
&= \frac{LQr^2\left(2r-3a\right)}{\varepsilon_0 a^3}
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$ を使った。また、$a \leq r$ の場合は、積分範囲が $[0,a]$ になる。したがって、先の式で $r \to a$ とすればよく、

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V = -\frac{LQ}{\varepsilon_0}$$

である。以上をまとめると、ガウスほ法則の積分形の式 (**??**) は、

$$2\pi r L E_r = \begin{cases} \dfrac{LQr^2\left(2r-3a\right)}{\varepsilon_0 a^3} & r \leq a \text{ のとき} \\ -\dfrac{LQ}{\varepsilon_0} & a \leq r \text{ のとき}\end{cases}$$

となる。これから、直ちに電場 $E_r$ は

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{Qr\left(2r-3a\right)}{2\pi\varepsilon_0 a^3} & r \leq a \text{ のとき} \\ -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r} & a \leq r \text{ のとき}\end{cases}$$

と導かれる。

電場が求められたので、それを積分してポテンシャルを求める。この問題の電荷は、無限に長い円柱となっているので、無限の電荷が含まれる。したがって、無限遠からの電場の積分は発散してしまいうので、無限遠点を基準にするわけにはいかない。そこで、$r = a$ の場所を基準として $\phi(a) = 0$ とする。他の場所を基準にしても良いが、ここを基準とした場合、もっとも積分が容易である。$r \leq a$ の場合は、

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= -\int_a^r \frac{Qr\left(2r-3a\right)}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q\left(5a^3 - 9ar^2 + 4r^3\right)}{12\pi\varepsilon_0 a^3} \qquad r \leq a
\end{aligned}$$

となる。一方、$r \geq a$ の場合は、

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= -\int_a^r \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{r}{a}\right) \qquad r \geq a
\end{aligned}$$

である。

[**問 2**] $\boxed{\textit{20 点}}$ コンデンサーの片側の電極の電荷量 $Q$ と電圧 $V$、静電容量 $C$ には、

$$Q = CV$$

の関係がある。これを使って電荷量を求めることになる。そこで、コンデンサーの内側の電極 (半径 $a$) に $Q$ の電荷、外側の電極 (半径 $b$) に $-Q$ の電荷があるとする。この状態で電圧 (ポテンシャル) を求めて、静電容量を求めることにする。

この場合も、電圧は電場を積分する事により求めるのが簡単である。問題が、全て球形なので極座標系を用いることにする。内側と外側の電極間に生じる電場は、対称性により

$$E_\theta = 0 \qquad\qquad E_\varphi = 0$$

となり、$E_r$ を求めることに問題は帰着される。これは、積分形のガウスの法則を用いることにより容易に計算できる。内側と外側の間に同心の球の領域を考え、この法則を適用する。

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_r \qquad a \leq r \leq b$$

となる。一方、

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

となる．これらは等しいので、電極間の電場は

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad a \leq r \leq b$$

となる。

これから電極間の電位差は、この電場を積分することにより求められる。積分の結果は

$$\begin{aligned} V(a) - V(b) &= -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab} \end{aligned}$$

となる。

最初に示した、電圧と電荷量、静電容量の関係式から、

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= Q\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q}\frac{ab}{b-a} \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \end{aligned}$$

となる。

[**問 3**] $\boxed{\textit{20 点}}$ 平行平板コンデンサーの静電容量 $C$ は、

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

となる。したがって、微小静電容量は、

$$\begin{aligned} \mathrm{d}C &= \frac{\varepsilon_0}{d}\mathrm{d}S \\ &= \frac{\varepsilon_0}{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \end{aligned}$$

と書いても良いだろう。

これを使って、問題のコンデンサーの静電容量を求める。単に積分をするだけの話である。

静電容量は

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon_0\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{d + \frac{2\delta}{a}x}\mathrm{d}x \\ &= \varepsilon_0 b \times \frac{a}{2\delta}\log\left(\frac{d+\delta}{d-\delta}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_0 ab}{2\delta}\log\left(\frac{1+\delta/d}{1-\delta/d}\right) \end{aligned}$$

となる。これを、$\delta \ll 1$ としてテイラー展開する。ここで、テイラー展開式

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots$$

を用いる。すると、コンデンサーの静電容量は、

$$\begin{aligned} C &\simeq \frac{\varepsilon_0 ab}{2\delta}\left[2\left(\frac{\delta}{d}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^3\right] \\ &\simeq \frac{\varepsilon_0 ab}{d}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2\right] \end{aligned}$$

となる。

**[問 4]** $\boxed{\textit{20}\text{点}}$ 点 O から直線電流に沿った座標を $x$ とする．A の方向が負で B の方向が正とする．このときの微小磁場は，ビオ・サバールの法則より

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}x \times \boldsymbol{r}}{r}$$

となる．ここで，P 点での磁場は紙面と垂直方向であり，$|\mathrm{d}x \times \boldsymbol{r}/r| = \sin\theta \mathrm{d}x$ となる．x の位置によらず磁場の方向は同じなので，$\mathrm{d}B$ とスカラーで書いても良いだろう．微小磁場は，

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \sin\theta \mathrm{d}x}{4\pi r^2}$$

となる．これを積分すればよいのだが，そのために，

$$\tan\theta = -\frac{R}{x} \qquad\qquad r\sin\theta = R$$

をつかう．これらから，

$$\mathrm{d}x = \frac{R}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \qquad\qquad r = \frac{R}{\sin\theta}$$

これらを使うと，

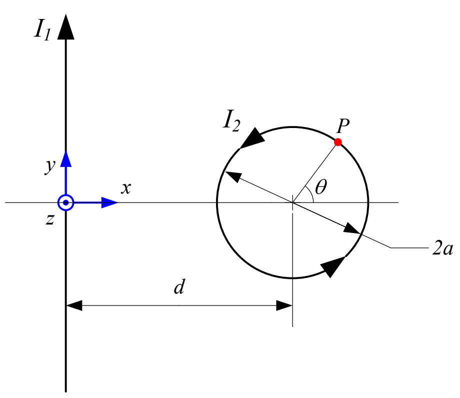
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

となり，A から B まで積分を行うと，

$$\begin{aligned} B &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right] \end{aligned}$$

となる．

**[問 5]** $\boxed{\textit{20}\text{点}}$ 下図のように座標系を決める．




証明はしないが，円形回路が作る磁場でその円形回路に作用する力の大きさの合計は，ゼロである．もしゼロでないと，自分自身の電流で永久に力を受けることになり，永久機関が出来てしまう．これは矛盾である．

円形回路上の任意の点 P の位置での直線電流が作る磁場は，z 方向成分 $B_z$ のみで，その強さはアンペールの法則から，

$$B_z = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + a\cos\theta)}$$

となる．P 点での円形回路の電流は x 成分と y 成分に分けることができ，それぞれ

$$I_x = -I_2 \sin\theta \qquad\qquad I_y = I_2\cos\theta$$

となる．
微少電流 $\boldsymbol{I}\mathrm{d}\ell$ が磁場 $\boldsymbol{B}$ より受ける力は，ローレンツ力から，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\mathrm{d}\ell \times \boldsymbol{B}$$

となる．ここで，$\mathrm{d}\ell = a\mathrm{d}\theta$ である．したがって，先ほど求めた磁場と電流による力は，

$$\mathrm{d}F_x = -I_x B_z a\mathrm{d}\theta = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin\theta}{2\pi(d+a\cos\theta)}a\mathrm{d}\theta \quad \mathrm{d}F_y = I_y B_z \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2\cos\theta}{2\pi(d+a\cos\theta)}a\mathrm{d}\theta$$

となる．これを $[-\pi, \pi]$ の範囲で積分すれば，円形回路に作用する力が分かる．$F_x$ を求める被積分関数は奇関数なので，この範囲の積分はゼロになる．一方，$F_y$ を求める被積分関数は偶関数なので，積分範囲を半分にして，それを 2 倍しても良い．円形回路の y 方向に作用する力は，

$$\begin{aligned}
F_y &= 2\int_0^\pi \frac{\mu_0 I_1 I_2 a\cos\theta}{2\pi(d+a\cos\theta)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^\pi \frac{a\cos\theta}{d+a\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^\pi \left[1 - \frac{d}{d+a\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\pi - \int_0^\pi \frac{d}{d+a\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right] \\
&\qquad \text{ここで}, \tan\frac{\theta}{2} = t \text{ と変数変換する} \\
&\qquad \text{すると}, \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\pi - \int_0^\infty \frac{d}{d + a\frac{1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\pi - \frac{2d}{d-a}\int_0^\infty \frac{1}{\frac{d+a}{d-a} + t^2}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left\{\pi - \frac{2d}{d-a}\left[\sqrt{\frac{d-a}{d+a}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{d+a}{d-a}}t\right)\right]_0^\infty\right\} \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\pi - \frac{\pi d}{\sqrt{d^2-a^2}}\right] \\
&= \mu_0 I_1 I_2\left[1 - \frac{d}{\sqrt{d^2-a^2}}\right]
\end{aligned}$$

となる．

**[問 6]** $\boxed{\textit{20}\text{点}}$ 微分形のマクスウェルの方程式は、以下の通りである。

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

これらの式を

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \qquad \text{ガウスの定理}$$
$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \mathrm{d}S = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\ell \qquad \text{ストークスの定理}$$

を使って、積分形に書き直す。

マクスウェルの方程式の 1 番目の式の両辺を体積積分を行い、ガウスの定理を使うと

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \int_V \rho \mathrm{d}V \qquad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \qquad \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

となり、積分形のガウスの法則が得られる。

同じことをマクスウェルの方程式の 2 番目の式に施すと

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V = 0 \qquad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \qquad \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0$$

が得られる。これが磁場に関する積分形のガウスの法則である。

次に、マクスウェルの方程式の番目の式に面積積分を行い、ストークスの定理を使うと

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \int_S \left( -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) \mathrm{d}S \quad \text{ストークスの定理} \Rightarrow \quad \int_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

が得られる。これは、積分形で表したファラデーの電磁誘導の法則である。

最後は、マクスウェルの方程式の 4 番目の式に同じようにストークスの定理を応用すると

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{H} \mathrm{d}S = \int_S \left( \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}S \quad \text{ストークスの定理} \Rightarrow \quad \int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

が得られる。これは、積分形のアンペール-マクスウェルの法則である。