補講テキスト

山本昌志*

2005 年 9 月 28 日

1　静電場

1.1　復習

1.1.1　電荷から電場を求める方法

静電場の問題では、マクスウェルの方程式の

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1}$$

を使う場合が多い。誘電体の問題を扱わなければ、$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ を用いて、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2}$$

を使う方が簡単である。これと、ガウスの定理

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V \tag{3}$$

を用いると、

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{4}$$

という積分型の式が得られる。一般的な問題では、この積分型の式を計算する方が簡単である。ある閉じた領域の表面での電場の積分は、内部の総電荷量を誘電率で割ったものに等しいと言っている。

1.1.2　ポテンシャルを求める方法

ここで言うポテンシャルにはいろいろな呼び方がある。静電ポテンシャルやスカラーポテンシャル、電位、電圧、電位差などである。これらは、全て同じ物理量を表すことに注意が必要である。ここでは、単にポテンシャルと呼ぶことにする。

*独立行政法人　秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

ポテンシャル ϕ は、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{5}$$

と定義される。これと、勾配の積分の定理

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6}$$

から、

$$\phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{7}$$

となる。これは、2 点間のポテンシャルの差を表す式である。電場が分かっている場合、この式から、ポテンシャルを計算するのがもっとも簡単である。

次に、電荷が分かっている場合のポテンシャルの求め方を考えなくてはならない。クーロンの法則から、ある点電荷 Q の作る電場は、

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{8}$$

である。したがって、これを積分することによりポテンシャルは、

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} + C \tag{9}$$

となる。この式を、元の式 (5) に代入すれば、クーロンの法則から導かれる電場が求められることから、正しいことが分かる。ここで、積分定数 C がじゃまなので、ポテンシャルの基準を作ることにより、それを消去する。通常、$C = 0$ になるように、無限遠点がゼロ ($\phi(\infty) = 0$) になるように選ばれる。したがって、点電荷 Q の中心から距離 r 離れた位置のポテンシャルは、

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} \tag{10}$$

となる。点電荷が数多くあるとそれを足しあわせ、連続的に分布していると積分

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(r')}{|r - r'|}\mathrm{d}V' \tag{11}$$

する事により求める。

ポテンシャルの基準を決める場合、注意しなくてはならないことがある。問題により、考えている系の電荷量が無限になる場合、式 (11) のポテンシャルは発散する。このような場合は、適当な場所 $\boldsymbol{r}_0$ を基準として、

$$\phi(\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}_0) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

を計算する。通常、基準ポテンシャルはゼロとするので、$\phi(\boldsymbol{r}_0)$=0 を用いて、

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

となる。

1.1.3 ポテンシャルから電場を求める方法

ポテンシャルが分かっている場合、電場は簡単に求められる。ポテンシャルの定義の式

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{14}$$

を使うだけである。積分に比べて、微分は簡単である。

1.2 練習問題と解答

［**問 1**］

半径 a の球殻の表面上に電荷 Q を与えたとき、球の内外の電場を求めよ。

球殻の中心を原点とした球座標を考える。この原点を中心として、全ては対称なので、電場の成分のうち、E_r のみ値を持つことができ、他の成分は

$$E_\theta = 0 \qquad\qquad E_\phi = 0$$

とゼロとなる。ここでの問いは、この E_r を求めることに帰着される。

この E_r を求めるために、式 4 の積分形のガウスの法則を使うことになる。この式を適用する領域を、この球殻を中心にした球状にすると積分は簡単になる。電場を求める位置 r とすると、この式の左辺は、

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_r$$

となる。積分領域の球の表面では、電場 E_r は一定で、積分領域の法線方向と一致するためである。一方、右辺は

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho\mathrm{d}V = \begin{cases} 0 & r \leq a \text{ のとき} \\ \dfrac{Q}{\varepsilon} & a \leq r \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。したがって、

$$4\pi r^2 E_r = \begin{cases} 0 & r \leq a \text{ のとき} \\ \dfrac{Q}{\varepsilon} & a \leq r \text{ のとき} \end{cases}$$

である。これから、球殻の内外の電場は、

$$E_r = \begin{cases} 0 & r \leq a \text{ のとき} \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & a \leq r \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。

[**問 2**]

半径 a の無限に長い円柱のなかに、電荷密度が $\rho(r) = 3Q(r-a)/\pi a^3$ の電荷が分布している。この円柱の内外の静電ポテンシャルを求めよ。なお、r は円柱の中心軸からの距離である。

注意:教科書の解答には間違いがある。

この問題は、軸対称である。したがって、円柱座標系 (r, θ, z) を使うと問題が簡単である。そして、この問題では、電場が間単に求められるので、電場を積分する式 7 を使うことになる。

対称性により、電場は、

$$E_\theta = 0 \qquad\qquad E_z = 0$$

となり、値を持つのは E_r のみである。この電場を式 (4) を用いて計算することにする。積分の領域を、長さ L、半径 r の円筒した場合、この式の左辺は、

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 2\pi r L E_r$$

となる。円筒の上下のふたの部分は、$E_z = 0$ のため、積分はゼロになる。一方、$r \le a$ の場合、右辺は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^L \mathrm{d}z\int_0^r \frac{3Q(r-a)}{\pi a^3} r\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi L}{\varepsilon_0}\frac{3Q}{\pi a^3}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{ar^2}{2}\right]_0^r \\
&= \frac{LQr^2\left(2r-3a\right)}{\varepsilon_0 a^3}
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$ を使った。また、$a \le r$ の場合は、積分範囲が $[0, a]$ になる。したがって、先の式で $r \to a$ とすればよく、

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V = -\frac{LQ}{\varepsilon_0}$$

である。以上をまとめると、ガウスほ法則の積分形の式 (4) は、

$$2\pi r L E_r = \begin{cases} \dfrac{LQr^2\left(2r-3a\right)}{\varepsilon_0 a^3} & r \le a \text{ のとき} \\ -\dfrac{LQ}{\varepsilon_0} & a \le r \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。これから、直ちに電場 E_r は

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{Qr\left(2r-3a\right)}{2\pi\varepsilon_0 a^3} & r \le a \text{ のとき} \\ -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r} & a \le r \text{ のとき} \end{cases}$$

と導かれる。

電場が求められたので、それを積分してポテンシャルを求める。この問題の電荷は、無限に長い円柱となっているので、無限の電荷が含まれる。したがって、無限遠からの電場の積分は発散してしまいうので、無限遠点を基準にするわけにはいかない。そこで、$r=a$ の場所を基準として $\phi(a)=0$ とする。他の場所を基準にしても良いが、ここを基準とした場合、もっとも積分が容易である。式 (13) に従い積分を行うことになる。$r\leq a$ の場合は、

$$\begin{aligned}\phi(r)&=-\int_a^r\frac{Qr\left(2r-3a\right)}{2\pi\varepsilon_0a^3}\mathrm{d}r\\&=\frac{Q\left(5a^3-9ar^2+4r^3\right)}{12\pi\varepsilon_0a^3}\qquad r\leq a\end{aligned}$$

となる。一方、$r\geq a$ の場合は、

$$\begin{aligned}\phi(r)&=-\int_a^r\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0r}\mathrm{d}r\\&=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{r}{a}\right)\qquad r\geq a\end{aligned}$$

である。

[問 3]

半径がそれぞれ a と $b(\geq a)$ の導体球を同心にしてつくった球形コンデンサーの静電容量を求めよ。

コンデンサーの片側の電極の電荷量 Q と電圧 V、静電容量 C には、

$$Q=CV \tag{15}$$

の関係がある。これを使って電荷量を求めることになる。そこで、コンデンサーの内側の電極 (半径 a) に Q の電荷、外側の電極 (半径 b) に $-Q$ の電荷があるとする。この状態で電圧 (ポテンシャル) を求めて、静電容量を求めることにする。

この場合も、電圧は電場を積分する事により求めるのが簡単である。問題が、全て球形なので極座標系を用いることにする。内側と外側の電極間に生じる電場は、対称性により

$$E_\theta=0 \qquad\qquad E_\varphi=0 \tag{16}$$

となり、E_r を求めることに問題は帰着される。これは、積分形のガウスの法則を用いることにより容易に計算できる。内側と外側の間に同心の球の領域を考え、この法則を適用する。式 (4) の左辺は、

$$\int_S\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=4\pi r^2E_r\qquad a\leq r\leq b \tag{17}$$

となる。一方、右辺は

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{18}$$

この右辺と左辺は等しいので、電極間の電場は

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad a \le r \le b \tag{19}$$

となる。

これから電極間の電位差は、この電場を積分することにより求められる。積分の結果は

$$\begin{aligned} V(a) - V(b) &= -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \qquad (20)\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \qquad (21)\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab} \qquad (22) \end{aligned}$$

となる。

最初に示した、電圧と電荷量、静電容量の関係式から、

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \qquad (23)\\ &= Q\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q}\frac{ab}{b-a} \qquad (24)\\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \qquad (25) \end{aligned}$$

となる。

[問 4]

それぞれの辺の長さが a, b の長方形の電極からできているコンデンサーの電極が、正確に平行でなく、長さ a の辺に沿う方向の一端の距離が $d+\delta$、他端の距離が $d-\delta$ になっている。このコンデンサーの静電容量を $d \gg \delta$ として (δ/d) の 2 次の程度で求めよ。

注意:教科書の解答のテイラー展開に間違いがある。

平行平板コンデンサーの静電容量 C は、

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{26}$$

となる。したがって、微小静電容量は、

$$\mathrm{d}C = \frac{\varepsilon_0}{d}\mathrm{d}S \tag{27}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{28}$$

と書いても良いだろう。

これを使って、問題のコンデンサーの静電容量を求める。単に積分をするだけの話である。静電容量は

$$C = \varepsilon_0 \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{d + \frac{2\delta}{a}x}\mathrm{d}x \tag{29}$$

$$= \varepsilon_0 b \times \frac{a}{2\delta} \log\left(\frac{d+\delta}{d-\delta}\right) \tag{30}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 ab}{2\delta} \log\left(\frac{1+\delta/d}{1-\delta/d}\right) \tag{31}$$

となる。これを、$\delta \ll 1$ としてテイラー展開する。ここで、テイラー展開式

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots \tag{32}$$

を用いる。すると、コンデンサーの静電容量は、

$$C \simeq \frac{\varepsilon_0 ab}{2\delta}\left[2\left(\frac{\delta}{d}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^3\right] \tag{33}$$

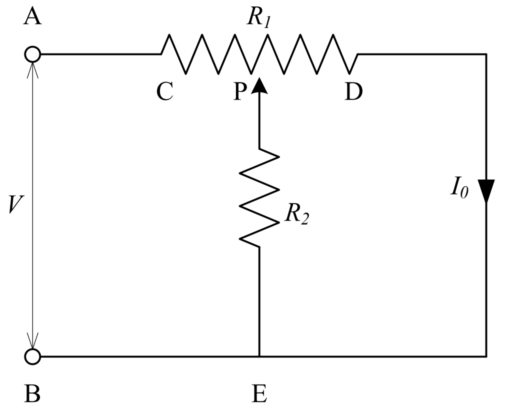
$$\simeq \frac{\varepsilon_0 ab}{d}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2\right] \tag{34}$$

となる。

2　電気回路

［**問 1**］

図の回路の両端 AB 間に電圧 V をかけたとき、図の電流 I_0 の強さを最小にするには、P 点の位置を CD 間のどこにすればよいか。



教科書にならい CP 間の抵抗を X とする。すると、PD 間の抵抗は $R_1 - X$ となる。あとは、キルヒホッフの法則を使えば計算できる。左の回路に流れる電流を I_i、右の回路に流れる電流を I_0 とする。すると、以下の連立方程式

$$V - I_1 X - (I_1 - I_0)R_2 = 0$$
$$-(I_0 - I_1)R_2 - I_0(R_1 - X) = 0$$

が成り立つ。これから、I_0 を求めることになるが、めんどくさいので Mathematica を使う。すると

$$I_0 = \frac{R_2 V}{-X^2 + R_1 X + R_1 R_2}$$

となる。

この電流を最小にするためには、分母を最大にする必要がある。幸いなことに、分母は上に凸な二次関数なので、最大値がある。導関数がゼロの場合で、

$$-2X + R_1 = 0$$

となる。したがって、

$$X = \frac{R_1}{2}$$

となり、丁度、R_1 の中点に P にすればよい。

［**問 2**］

起電力が ϕ^e、内部抵抗が r の n 個の電池を直列または並列に接続し、これを抵抗 R につないだとき、それぞれの回路を流れる電流の強さを求めよ。

n 個直列につないだ場合は、$n\phi^e$ の電圧が nr の抵抗と R の抵抗に印可されたと考える。したがって、この場合、流れる電流は、

$$I = \frac{n\phi^e}{nr + R}$$

となる。

並列につないだ場合の抵抗 R に流れる電流を I とする。すると、各電池に流れる電流は I/n となる。オームの法則とキルヒホッフの法則を使うと、

$$\phi^e - \frac{I}{n}r - IR = 0$$

となる。これから、電流は、

$$I = \frac{n\phi^e}{r + nR}$$

となる。

3　静磁場

［**問 1**］

半径 a の無限に長い円柱状の導体内を、一様な密度で強さ I の電流が流れているとき、円柱の内外に生じる磁束密度を求めよ。

軸対称問題なので，円柱座標系を使うのが簡単である．電流があるときの静磁場は，アンペールの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

を用いると簡単に計算できる．円柱状の導体内部の電流密度 $\boldsymbol{j}$ は，$I/\pi a^2$ である．当然，導体外部では $\boldsymbol{j} = 0$ となる．

アンペールの法則をストークスの定理を用いて，積分形に書き改めると，

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \ell = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}S \tag{35}$$

となる．円柱の中心を $r = 0$ として，円柱の内部と外部でこれを積分することを考える．当然，磁場は円柱座標系の r 方向成分 B_r のみである．従って，積分は，

$$2\pi r B_r = \begin{cases} \mu_0 \pi r^2 \dfrac{I}{\pi a^2} = \mu I \dfrac{r^2}{a^2} & 0 \leq r \leq a \text{ の場合} \\ \mu_0 I & a \leq r \text{ の場合} \end{cases} \tag{36}$$

となる．これから，磁束密度は，

$$B_r = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & 0 \leq r \leq a \text{ の場合} \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & a \leq r \text{ の場合} \end{cases} \tag{37}$$

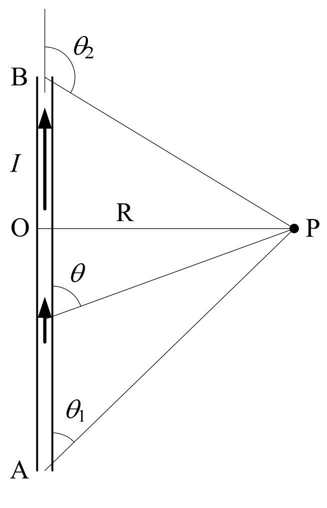
と求められる．

[問 2]

図の直線電流 I の AB の部分が、図の P 点につくる磁束密度は

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right]$$

で与えられることを示せ。



点 O から直線電流に沿った座標を x とする．A の方向が負で B の方向が正とする．このときの微小磁場は，ビオ・サバールの法則より

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}x \times \boldsymbol{r}}{r}$$

となる．ここで，P 点での磁場は紙面と垂直方向であり，$|\mathrm{d}x \times \boldsymbol{r}/r| = \sin\theta \mathrm{d}x$ となる．x の位置によらず磁場の方向は同じなので，$\mathrm{d}B$ とスカラーで書いても良いだろう．微小磁場は，

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \sin\theta \mathrm{d}x}{4\pi r^2}$$

となる．これを積分すればよいのだが，そのために，

$$\tan\theta = -\frac{R}{x} \qquad\qquad r\sin\theta = R$$

をつかう．これらから，

$$\mathrm{d}x = \frac{R}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \qquad\qquad r = \frac{R}{\sin\theta}$$

これらを使うと，

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

となり，A から B まで積分を行うと，

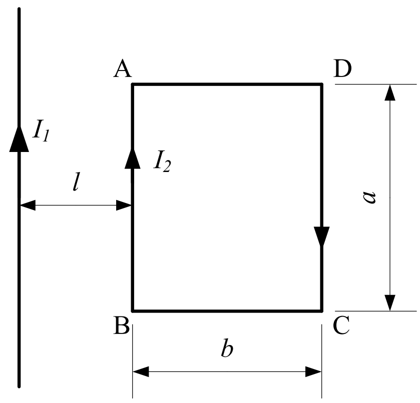
$$\begin{aligned} B &= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right] \end{aligned}$$

となる．

4 ローレンツ力

[問 1]

無限に長い直線電流 I_1 と同じ平面内に、図のような長方形の回路があり、そこに強さ I_2 の電流を流した。この長方形の回路に作用する力を求めよ。



証明はしないが，長方形の回路が作る磁場でそ長方形の形回路に作用する力の大きさの合計は，ゼロである．もしゼロでないと，自分自身の電流で永久に力を受けることになり，永久機関が出来てしまう．これは矛盾である．

長方形の回路と同一平面で，紙面に垂直方向で紙面から手前に向かう方向が z 方向，B←C を x 方向，B←A を y 方向とする．直線電流の軸を y 軸とし，x 軸の原点は直線電流上にあるとする．長方形回路の

x での直線電流が作るコイルと同一平面上の磁場は，z 方向成分 B_z のみで，その強さはアンペールの法則から，

$$B_z = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

となる．

コイルに流れる電流は，x および y 方向である．B→C を x 方向，B→A を y 方向とする．もちろん，右手系を採用するので，である．

微少電流 $\boldsymbol{I}\mathrm{d}\ell$ が磁場 $\boldsymbol{B}$ より受ける力は，ローレンツ力から，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\mathrm{d}\ell \times \boldsymbol{B}$$

となる．ここで，$\mathrm{d}\ell = a\mathrm{d}\theta$ である．磁場は z 方向のみなので，長方形の長方形回路に作用する y 方向の力は，x 方向を向いた AD と，CB に流れる電流によるローレンツ力の和で

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_{\ell}^{\ell+b}\frac{I_2}{x}\mathrm{d}x - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_{\ell}^{\ell+b}\frac{I_2}{x}\mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．AD と，CB に流れる電流による y 方向の力はキャンセルされるのである．次に，BA と CD の y 方向の電流による x 方向の力を計算する．これは，

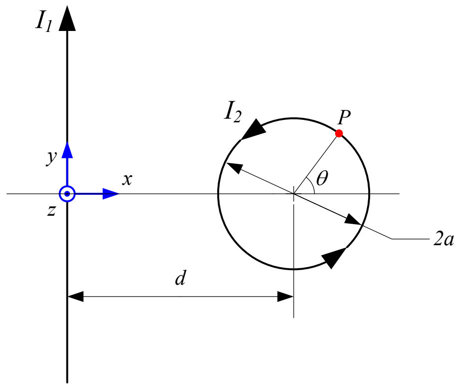
$$\begin{aligned} F_x &= -\int_0^a I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\ell}\mathrm{d}y + \int_0^a I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\ell+b)}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\left(\frac{1}{\ell+b} - \frac{1}{\ell}\right) \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi\ell(\ell+b)} \end{aligned}$$

となる．

［問 2］

無限に長い直線電流 I_1 と、半径 a の円形回路が同一平面におかれていて、その円の中心から直線電流までの距離は $d(\geq a)$ であり、円形回路内の電流の強さは I_2 であるとする。このとき円形回路に作用する力を求めよ。

下図のように座標系を決める．



証明はしないが，円形回路が作る磁場でその円形回路に作用する力の大きさの合計は，ゼロである．もしゼロでないと，自分自身の電流で永久に力を受けることになり，永久機関が出来てしまう．これは矛盾である．

円形回路上の任意の点 P の位置での直線電流が作る磁場は，z 方向成分 B_z のみで，その強さはアンペールの法則から，

$$B_z = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + a\cos\theta)}$$

となる．P 点での円形回路の電流は x 成分と y 成分に分けることができ，それぞれ

$$I_x = -I_2 \sin\theta \qquad\qquad I_y = I_2 \cos\theta$$

となる．

微少電流 $\boldsymbol{I}\mathrm{d}\ell$ が磁場 $\boldsymbol{B}$ より受ける力は，ローレンツ力から，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\mathrm{d}\ell \times \boldsymbol{B}$$

となる．ここで，$\mathrm{d}\ell = a\mathrm{d}\theta$ である．したがって，先ほど求めた磁場と電流による力は，

$$\mathrm{d}F_x = -I_x B_z a\mathrm{d}\theta = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 \sin\theta}{2\pi(d + a\cos\theta)} a\mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}F_y = I_y B_z \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \cos\theta}{2\pi(d + a\cos\theta)} a\mathrm{d}\theta$$

となる．これを $[-\pi, \pi]$ の範囲で積分すれば，円形回路に作用する力が分かる．F_x を求める被積分関数は奇関数なので，この範囲の積分はゼロになる．一方，F_y を求める被積分関数は偶関数なので，積分範囲を

半分にして，それを 2 倍しても良い．円形回路の y 方向に作用する力は，

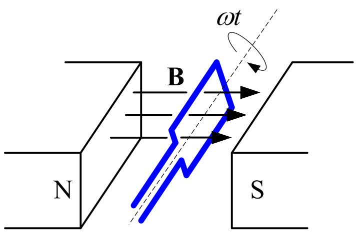
$$
\begin{aligned}
F_y &= 2\int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2 a\cos\theta}{2\pi(d+a\cos\theta)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{a\cos\theta}{d+a\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[1-\frac{d}{d+a\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\pi-\int_0^{\pi} \frac{d}{d+a\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right] \\
&\qquad \text{ここで}, \tan\frac{\theta}{2}=t\ \text{と変数変換する} \\
&\qquad \text{すると}, \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\pi-\int_0^{\infty} \frac{d}{d+a\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\pi-\frac{2d}{d-a}\int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{d+a}{d-a}+t^2}\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left\{\pi-\frac{2d}{d-a}\left[\sqrt{\frac{d-a}{d+a}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{d+a}{d-a}}t\right)\right]_0^{\infty}\right\} \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\pi-\frac{\pi d}{\sqrt{d^2-a^2}}\right] \\
&= \mu_0 I_1 I_2\left[1-\frac{d}{\sqrt{d^2-a^2}}\right]
\end{aligned}
$$

となる．

5　電磁誘導

［**問 1**］

図のように磁石の間に面積 $S = 1.0 \times 10^{-2}\mathrm{m}^2$ で、抵抗 $R = 10\Omega$ の長方形コイルを設置して、その中心軸のまわりを角速度 $\omega = 3 \times 10^3\mathrm{s}^{-1}$ で回転させる。このとき、コイル内に発生する電流の強さの最大値はいくらか。なお、磁石の作る磁束密度の強さは $B = 0.5\mathrm{T}$ とする。また、コイル内の誘導電流のつくる磁場による効果は無視してよい。



コイルを貫く磁束 ϕ は、

$$
\begin{aligned}
\phi &= \int_S B\mathrm{d}S \sin(\omega t + \theta_0) \\
&= BS \sin(\omega t + \theta_0)
\end{aligned}
$$

と書ける。コイル 1 周に発生する電圧 V は、

$$
\begin{aligned}
V &= \oint \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\
&= \int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \\
&= \int_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \phi \mathrm{d}S \\
&= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

となる。フラックス ϕ は、最初に示した式を使う。すると、

$$
V = -\omega BS \sin(\omega t + \theta_0)
$$

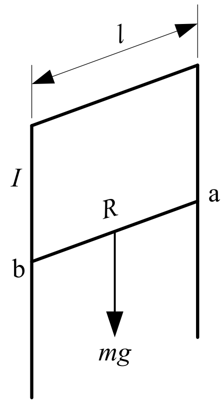
と電圧を求めることができる。電流はオームの法則 $V = IR$ より

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{V}{R} \\
&= -\frac{\omega BS \sin(\omega t + \theta_0)}{R}
\end{aligned}
$$

となる。電流の最大値は、$\omega BS/R$ となり、それぞれ値を代入すると、1.5[A] になる。

[問 2]

図のように幅が ℓ で抵抗が無視できる導線に質量 m 抵抗 R の導線 a,b を水平にかけて閉回路をつくる。この閉回路に垂直に一様な静磁場 $\boldsymbol{B}$ をかけて、導線 ab を自由落下させたとき、その終速度を求めよ。なお、このとき導線間の摩擦力と閉回路内の誘導電流のつくる磁場は無視できるものとする。



導線 a,b が一番上にあるとき $x=0$ とする座標を選び，下に向かうとそれが増加するようにする．すると回路が囲む面積 S は，$x\ell$ となる．ここを貫く，フラックスは $\phi = x\ell B$ となる．抵抗は，導線 a,b のみなので，その間の電圧は，

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \\
&= -\ell B v
\end{aligned}
$$

である．これから，回路に流れる電流は

$$
I = -\frac{\ell B v}{R} \tag{38}
$$

となる．

この電流が流れることにより，ローレンツ力が発生することになる．ローレンツ力は，qvB となるが，電

荷密度 ρ と導線の断面積 S と長さ ℓ を考えると

$$
\begin{aligned}
F &= qvB \\
&= \int \rho v B \mathrm{d}V \\
&= \rho v B S \ell \\
&\quad \rho v S = I \text{ なので} \\
&= I B \ell
\end{aligned}
$$

と書くことができる．終速度に達した場合，このローレンツ力と重力による力が釣り合うので，$mg + Iv\ell = 0$ となる．電流は分かっているので，終速度は，

$$
v = \frac{Rmg}{B^2 \ell^2}
$$

となる．

6　マクスウェルの方程式

［**問 1**］

微分形のマクスウェルの方程式を示せ。

微分形のマクスウェルの方程式は、以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

［**問 2**］

ガウスの定理とストークスの定理を使って、微分形のマクスウェルの方程式を積分形に書き改めよ。

微分形のマクスウェルの方程式は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

である。これらの式を

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \qquad \text{ガウスの定理}$$
$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \mathrm{d}S = \oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\ell \qquad \text{ストークスの定理}$$

を使って、積分形に書き直す。

マクスウェルの方程式の 1 番目の式の両辺を体積積分を行い、ガウスの定理を使うと

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \int_V \rho \mathrm{d}V \qquad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \qquad \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

となり、積分形のガウスの法則が得られる。

同じことをマクスウェルの方程式の 2 番目の式に施すと

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V = 0 \qquad \text{ガウスの定理} \Rightarrow \qquad \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0$$

が得られる。これが磁場に関する積分形のガウスの法則である。

次に、マクスウェルの方程式の番目の式に面積積分を行い、ストークスの定理を使うと

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \int_S \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) \mathrm{d}S \qquad \text{ストークスの定理} \Rightarrow \qquad \int_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

が得られる。これは、積分形で表したファラデーの電磁誘導の法則である。

最後は、マクスウェルの方程式の 4 番目の式に同じようにストークスの定理を応用すると

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{H} \mathrm{d}S = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}S \quad \text{ストークスの定理} \Rightarrow \quad \int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

が得られる。これは、積分形のアンペール-マクスウェルの法則である。

7　波動方程式

[問 1]

自由空間中のマクスウェルの方程式を示せ。

自由空間では、電流や電荷はない。したがって、マクスウェルの方程式の中で、$\rho = 0$、$\boldsymbol{j} = 0$ とすればよい。すると、自由空間での電磁場を表すマクスウェルの方程式

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= 0
\end{aligned}$$

が得られる。

[問 2]

自由空間中のマクスウェルの方程式から、以下の波動方程式を導け。

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} &= 0 \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned}$$

自由空間では、電流や電荷はない。したがって、マクスウェルの方程式は

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= 0
\end{aligned}$$

となる。

この式のうち 3 番目のものの両辺に回転の演算子を作用させると、

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \\
&\qquad \text{マクスウェルの方程式の 4 番目の式) より} \\
&= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \qquad (39)
\end{aligned}$$

となり、電場のみの式にできる。ここで、右辺第一項であるが、これはベクトル恒等式 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} =$

$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ を使い、

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
&\qquad \text{マクスウェルの方程式の 1 番目の式より} \\
&= -\nabla^2 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

と変形できる。これで、電場のみの式となった。

同様のことを磁場について行う。マクスウェルの方程式の 4 番目の式の両辺の回転の演算子を作用させると

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E}) \\
&\qquad \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \text{とマクスウェルの方程式の 3 番目の式より} \\
&= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
&\qquad \text{マクスウェルの方程式の 2 番目の式より} \\
&= -\nabla^2 \boldsymbol{B} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

が得られる。

以上の操作により得られた電場と磁場の式を整理すると、

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}
$$

が得られる。