近接作用と静電場(その1)

山本昌志*

2005年6月3日

1 本日の授業内容

先週までで、ベクトル解析の基礎的な話は終わった。これからは、ベクトル解析を用いて、電磁気学を教科書に沿って学習する。

- 静電力と静電場
- ガウスの法則 (積分系)

ここでは、電荷が固定されており、時間的に変化しない静電場について説明する。原理的に、静電場の問題は、

- クーロンの法則
- 重ね合わせの原理

で全て解ける。しかし、現実にはこれだけを用いて計算するのは大変である。そこで、いろいろな計算方法が考え出されたわけである。ここでは、それを学習する。これは、数学的に計算テクニックを展開しただけではなく、静電場をいろいろな側面から見ることになり、新たな概念が広がることになる。数学を使うが数学を学ぶのではないことを理解して欲しい。新たな概念のイメージを大事にすることが重要である。

数学は公理があり、それに従い粛々と論理を展開し、体系を作る。一方自然科学、特には公理はなく、自然そのものが基本法則になる。数学の公理に当たる物理学の基本法則はまだ分かっていないので、自然科学を学ぶ場合、いろいろな側面から考えなくてはならない。諸君は、いろいろな側面から考える訓練を受けなくてはならない。

クーロンの法則と重ね合わせの原理を基本法則として、静電場の理論はできる。しかし、これから導かれる法則も基本原理となりうる。いろいろな法則がでてくるが、どれも正しく、優劣が無い。優劣があるとすれば、発見された順序あるいは式の単純さくらいである。静電場の場合、クーロンの法則と重ね合わせの原理から入るのは、直感的なイメージがつきやすいからである。それと、最初に発見されたからである。ここでも、クーロンの法則から出発するが、それから導かれるどの法則にも優劣が無いことを理解しなくてはならない。実際に問題を解くときには、計算が簡単な法則を使えば良いのである。

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

2　静電力と静電場

2.1　静電力の式の分割

最初に遠隔作用と近接作用の復習を行う。真空中に置かれた 2 つの電荷の間に働く力の大きさを示すクーロンの法則 (Coulomb law) は以前示したように、

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1}$$

と書くことができる。この式のそれぞれ記号とその単位については、表 1 に示している。qQ が負であれば、2 つの電荷に働く力は引力となり、正であれば斥力となる。当面、$1/4\pi\varepsilon_0$ は比例定数と考えて欲しい。

表 1: クーロンの法則の単位。ただし、SI 単位系である。

記号	物理量	単位	mksA での表現
F	力	N	m kg s^{-2}
Q または q	電荷量	C	s A
ε_0	真空中の誘電率	F/m	m^{-3} k^{-1} s^4 A^2

この力は、2 通りの見方ができる。遠隔作用 (action at distance) と近接作用 (action through medium) である。qQ の場合の q に働く力を考える。まずは、遠隔作用であるが、その概念を図 1 に示す。電荷 Q が q を引っ張っているのである。それだけの話であるが、なにもない空間を通して力が作用しているのである。何もない空間を通して力が作用するということはなかなかイメージできない。このことについては文献 [1] [1]には次のように書かれている。

> ニュートンが、太陽-地球間、地球-月間に引力が働くと語ったとき、何もない真空の空間を隔てて力が、それも瞬間的に及ぼされる ——**遠隔作用**—— というそのニュートンの考え方に多くの人が難色を示し、ニュートン自身もこの点ではっきりとした見解を出せないでいた。特に、日常的に知られる力の大半が、直接的接触による圧力や衝撃、あるいはゴムのような弾性体を媒介として伝えられるものであるだけに、遠隔作用のイメージはえがきにくいものであった。

次に近接作用であるが、そのイメージは図 2 である。Q があることによる q が受ける力は先ほどの遠隔作用と同じである。しかし、力の伝わり方がことなる。近接作用の場合は 2 段階で、

- Q がその周りの空間をゆがめる (場を変化させる)。
- 場が変化した結果、その場から q は力を受ける。

と考える。

どちらが正しいかというと、クーロンの法則だけ考えると、どちらも正しいのである。ただし、より進んだ問題を考えると遠隔作用には多くの問題がある。まずは、力が瞬時に伝わると言うのは、実験の結果から

[1] これは初心者には良い教科書である。

明らかに間違いである。この問題を解決するような遠隔作用を考えることもできると思われるが、その他いろいろと困難が生じる。そのようなことから、遠隔作用の考えはきっぱり捨てて、近接作用を採用した方が困難が少なくて済む。ということで、これ以降、全面的に近接作用の考えで進めることにする。

クーロンの法則の式 (1) から、近接作用にするためには、

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2}$$

$$F = qE \tag{3}$$

とすればよい。最初は、電荷 Q により r の位置の電場 E が生じると言っている。次の式は、その電場の作用により電荷 q は F という力を受けると言っている。このように、場と介して作用を受けるのである。

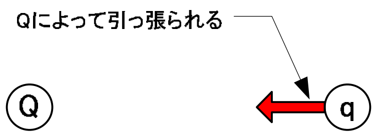

図 1: 電荷 q に及ぼされる遠隔作用

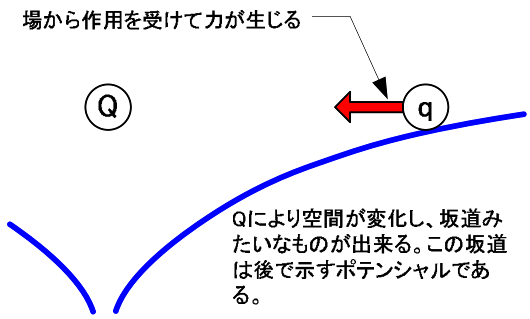

図 2: 電荷 q に及ぼされる近接作用

2.2　電場の概念

2.2.1　クーロンの法則と電場

この辺は、教科書に書いてあるとおりで、それに沿って説明する。

物理で書かれる方程式には、以下の決まりがある。

- 左辺と右辺の単位 (次元) が等しい。
- 左辺と右辺が表す量の性質が同一。左辺がスカラー量ならば右辺もスカラー量、左辺がベクトル量ならば右辺もベクトル量となる。

絶対にこれを満たさなくてはならない。例えば、単位が異なるものを等号で表したとする。この場合、単位系が変わるとその式は成立しなくなる。自然法則は、人工的に決められた単位で変わってはならない。人間が自然法則を決めるのではない。このようなことからも単位が等しい必要がある。ベクトルとスカラー量にしても同じである。人間が決めた座標系に依存した法則となり、そのようなものは役に立たない。

このような観点から、式 (3) を見ると、本当はベクトル量なのにスカラー量の用に書かれているものがある。力 F は、明らかにベクトル量である。すると、式 (3) の右辺もベクトル量である必要がある。電荷量

の q はスカラー量なので[2]、電場 E がベクトル量でなくてはならい。電場の方向を力の方向と考えると、この考えは良さそうである。

電場 E がベクトル量となると、式 (2) の右辺もベクトル量となる必要がある。$1/4\pi\varepsilon_0$ は比例定数みたいなものでスカラー量である。電荷量 Q もスカラー量である。r^2 と何か?。これは距離の 2 乗なので、これもスカラー量である。右辺は全てスカラー量ではないか!!!。何かが間違っている。次のような可能性が考えられる。

- 式 (2) に何か忘れているのか?
- 左辺がベクトル、右辺がスカラーの方程式が許されるのか?
- 電場 E をベクトル量としたことに間違いがあるのか?

2 番目を否定することは、さすがに、 恐ろしくてできない。3 番目については力がベクトル量であることは確かなので、否定はできない。残るのは、最初の疑問である。これはクーロンの法則そのものであるが、忘れていることがある。クーロンの法則をもう一度書くと、

- 真空中に 2 つの点電荷を置いたとき、距離の 2 乗に反比例し、電荷の積に比例した力が働く。
- 力の方向は 2 つの電荷の延長線上で、電荷の積が負の場合は引力が、正の場合は斥力が働く。

である。式 (2) は、この最初のことしか示していない。2 番目を示すためには、延長線の方向の単位ベクトルを乗じる必要がある。全てが納得いくように書くためには、

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{4}$$

とすれば良い。$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ が単位ベクトルと言うことを考えると、ちゃんと距離の 2 乗に反比例した力になっている。この式がクーロンの法則の全てを言っている。ベクトルは便利である。

この式の添え字の 1 と 2 を入れ替えると、$\boldsymbol{F}_2$ を求めることができる。すると、

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \tag{5}$$

になっていることが分かるであろう。これを作用反作用の法則と言う。

[問] 作用反作用の法則が成り立たない場合、永久機関が作れる。その永久機関を考えよ。

力は求まった。q_2 が位置 $\boldsymbol{r}_1$ に作る電場は、

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{6}$$

となる。q_2 が作る電場を図に示す。電場に沿った線が電気力線である。教科書にも書いてあるとおり、このような線は無いがいろいろと便利なので書かれる。1[C] の電荷から、$4\pi\varepsilon$ 本の電気力線がでていると言う表現は全くのウソである。この辺も教科書の通り。ただ、積分もよく分からない者にガウスの法則を教えるために、こじつけの説明に使われている。

式 (6) を一般化して、$\boldsymbol{r}'$ に位置にある電荷 $q(\boldsymbol{r}')$ ある任意の位置 $\boldsymbol{r}$ の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \tag{7}$$

となる。

[2] 座標を回転させても値は変わらない

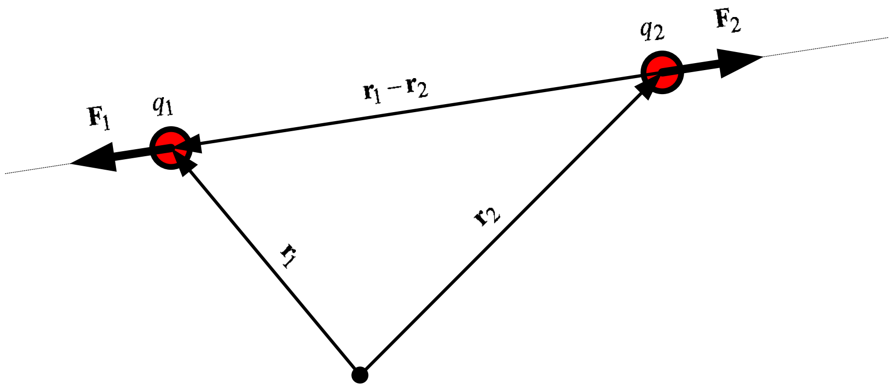

図 3: クーロン力

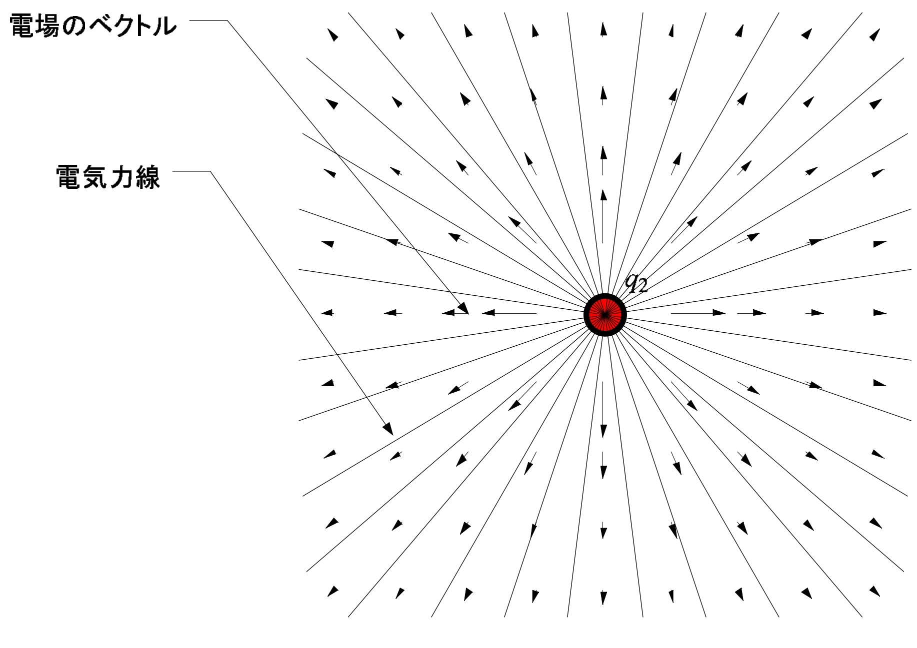

図 4: 電場と電気力線

2.2.2 重ね合わせの原理

いままでは、2 つの電荷の間に働く力を問題にしていた。3 つ以上の場合はど うなるだろうか?。答えは、それぞれの電荷からによる力のベクトル和である。このことから、電場もベクトル和になると考えることができる。事実、全ての電荷が作る電場を足しあわせるとそこの電場が分かる。このように足しあわせることを重ね合わせの原理と言う。これから、ある任意の位置 $\boldsymbol{r}$ の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{8}$$

となる。この様子を図 5 に示す。

次に、電荷が連続的に分布していると仮定しよう。位置 $\boldsymbol{r}$ での電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とると、先ほどの和の部分は積分となり、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{9}$$

と表せる。この様子を図 6 に示す。

宇宙全体にこの積分を行えば、静電場は分かる。しかし、実際の問題でこの積分を行うことはまず無い。単純な場合を除いて、この積分を実行することは大変である。そこで、もう少し簡単に計算する方法を考えることにする。

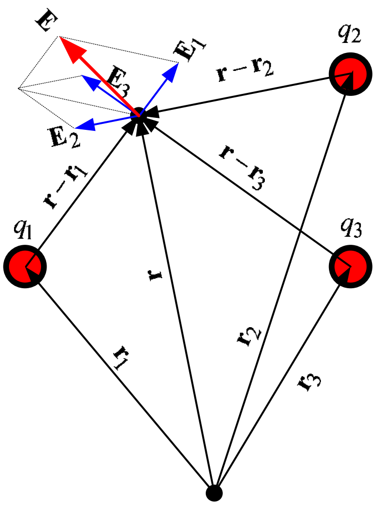

図 5: 点電荷がつくる電場の重ね合わせ

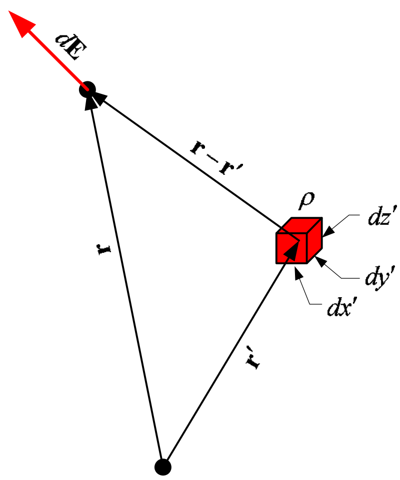

図 6: 連続分布した電荷が作る電場の重ね合わせ

2.3 自己力

これについての詳細は静電場のエネルギーと絡めて、後の講義で説明する。

3　ガウスの法則

電場を導入することにより近接作用の考えを導入したつもりでいた。しかし、式 (6) や (8)、(9) は、まだ満足できない。遠隔地にある電荷が電場を作っている式になっている。近接作用を考えると、その場所の電場はその周りからのみ作用を受けるべきである。そのためには、式を微分系に直すのが良いだろう。それぞれの式は正しいので、それを上手に使い微分形の式を導く。

3.1　積分形のガウスの法則

3.1.1　球の場合 (電荷は内側)

点電荷 Q があり、それから半径 R 離れた閉じた球を考える。図 7 に示すように、その球の表面の電場 E の面積分を考える。それは、式 (7) を用いると、

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S &= \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\int_S \mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}4\pi R^2 \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (10)\end{aligned}$$

となる。この式の言っていることは、

- 球の表面の電場 $\boldsymbol{E}$ の面積分 (左辺) は、電荷量 Q を誘電率 ε で割った値に等しい。そして、これは球の半径に依存しない。

である。この式を一般化して、球形以外の閉じた空間で成立する式ができれば、電場の計算に便利である。そこで、この考えを一般化することを進める。

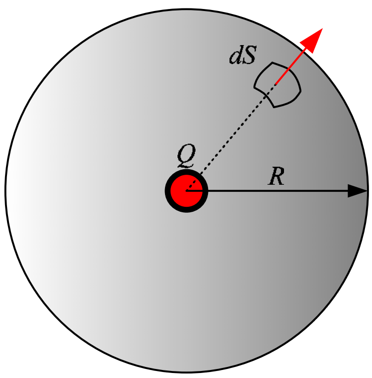

図 7: 点電荷を閉じた球で囲む

3.1.2 任意形状の場合 (電荷は外側)

次に図 8 のように、任意の形状の閉じた領域の外側に電荷がある場合を考える。球形領域の微少表面の $\mathrm{d}S_1'$ と $\mathrm{d}S_2'$ を考える。この場合の法線ベクトルの方向は、図に示すようにとる。すると、先ほどの球の計算より、

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1' \mathrm{d}S_1' + \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2' \mathrm{d}S_1' = 0 \tag{11}$$

が分かる。この微少面積の積分は、球形領域の半径に依存しないから、これが成り立つ。

次に、球形領域と任意形状の領域の関係を調べる。先ほどの図では分かり難いので、図 9 のように添字 1 の領域を拡大する。まずは、球形領域であるが、この場合法線ベクトルと電場の方向は等しいので、

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1' \mathrm{d}S_1' = |\boldsymbol{E}_1| \mathrm{d}S_1' \tag{12}$$

となる。任意領域では、

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}S_1 = |\boldsymbol{E}_1| \cos\theta \mathrm{d}S_1 \tag{13}$$

となる。図から明らかなように、それぞれの微少面積は

$$\mathrm{d}S_1 \cos\theta = \mathrm{d}S_1' \tag{14}$$

の関係がある。これら、3 つの式、(12) と (13)、(14) から、

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1' \mathrm{d}S_1' = \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}S_1 \tag{15}$$

が導かれる。この式は、立体角が等しい場合、電場の面積分は面の向きに依存しないと言っている。球のように電場と法線方向が一致した場合と図に示した任意形状のように一致しない場合でも面積分の値はおなじである。これは、面が傾いた分だけ面積が大きくなる割合と内積が減少する割合が等しく、それぞれの効果をキャンセルするからである。

図 8 の添え字 2 の領域でも、式 (15) の関係は成り立つ。従って、添字 1 と 2 の領域の式 (15) と式 (11) から、

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}S_1 - \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 \mathrm{d}S_1 = 0 \tag{16}$$

が成立する。この式は、電荷からみた同じの見込み角の添字 1 と添字 2 の領域の積分はキャンセルすると言っている。

このことは、閉じた任意形状の全ての部分で成り立つので、全てキャンセルする相手がある。ということは、任意形状の外側にあるとき、表面での電場の面積分はゼロになると言うことである。式で表すと

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0 \qquad \text{電荷が S の外側にある場合} \tag{17}$$

となる。

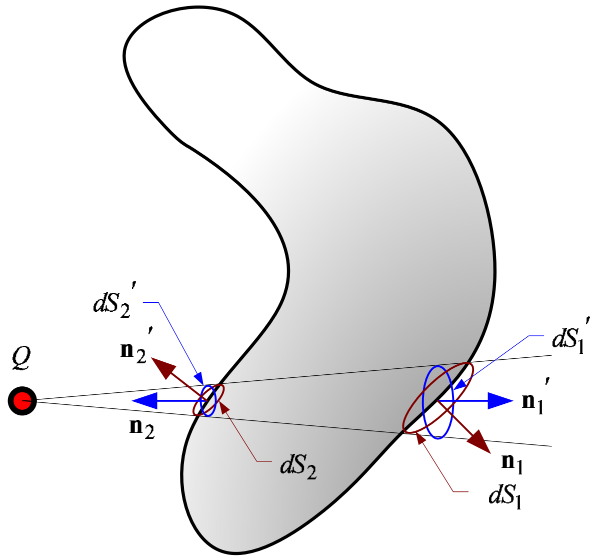

図 8: 電荷が外側にある場合

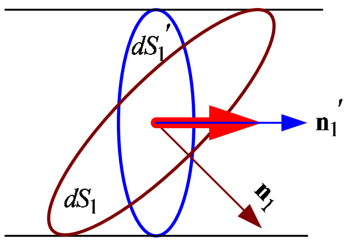

図 9: 添字 1 の領域を拡大

3.1.3 任意形状の場合 (電荷は内側)

最後に任意形状で、電荷がその内側にある場合を考える。これは、図 8 の中に電荷を入れるのであるが、図 10 のように考える。積分領域を以下の 3 つの部分に分ける。複素関数の積分を思い出せ。

- 領域の中にあり、電荷を囲んだ球形の領域の表面を S' とする。
- 元の任意の囲まれた領域の表面を S とする。
- この 2 つの領域を接続する部分を連結部とする。

電場 $\boldsymbol{E}$ の面積分は

$$\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S' + \int_{\text{連結部}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n''}\mathrm{d}S'' \tag{18}$$

となる。

図 10 に示した部分の表面で電場の面積分を行うが、電荷 Q は連結部を通して外側にあるので、

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S' + \int_{\text{連結部}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n''}\mathrm{d}S'' = 0 \tag{19}$$

となる。ここで、複素関数の積分を行ったのと同じテクニックをつかう。連結部のパイプの直径を極限まで小さくする。すると、そこの積分は寄与は無くなり

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S' = 0 \tag{20}$$

となる。ここで、内部の領域 S' の積分は、電荷 Q を球で囲んだ積分、式 (10) とほとんど同じである。法線方向のみ異なるので、積分結果の符号がことなる。従って、

$$\int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}'\mathrm{d}S' = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{21}$$

である。

最終的に我々が知りたい閉じた任意形状の領域に点電荷 Q がある場合、その表面での電場 $\boldsymbol{E}$ の面積分である。それは、式 (21) と (20) から

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{領域内部に点電荷 } Q \text{ がある場合} \tag{22}$$

となる。これは、領域内部に点電荷が無い場合の式 (16) も包含している。従って、点電荷が作る電場の面積分に関する式は (22) で十分である。この式の言っていることは、

- 点電荷を任意の閉じた領域で囲むと、その表面の電場の面積分は、その電荷量を誘電率 ε で割った値に等しい。

である。単純式であるが美しい関係式である。これが導かれるのは、電場が距離の 2 乗に反比例するからである。

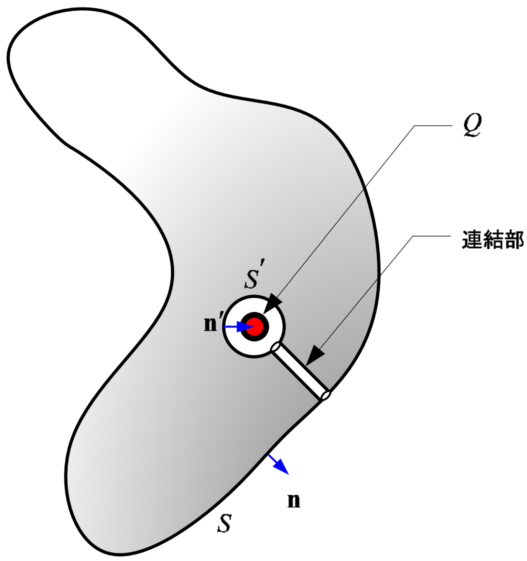

図 10: 電荷が閉じた領域の中にある場合

3.1.4 任意形状の場合 (複数の点電荷と連続分布)

電場は重ね合わせの原理が成り立つことから、

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i \qquad \text{領域内部の加算} \tag{23}$$

は明らかである。

　密度 ρ で連続的に電荷が分布している場合は、式 (24) の和を積分に変えれば良い。

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}V \tag{24}$$

体積積分の領域は、閉じた領域内部である。この式を積分形のガウスの法則という。この式の言っていることは、

- ある領域に含まれる電荷量は、その領域の表面で電場を面積分すれば分かる。

である。これは、実際に電場を計算する場合に重要なテクニックとなる。

　ガウスの定理は電束密度 $\boldsymbol{D}$ というベクトル場

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \tag{25}$$

を定義して、

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_V \rho\mathrm{d}V \tag{26}$$

と書かれることも多い。

4　課題

[問題 1] 教科書の例題 1(p.20)

[問題 2] 点電荷 Q が作る電場を、ガウスの定理より求めよ。

[問題 3] 電荷が線密度 λ [C/m] で線状に分布している。電荷分布は直線上で無限に長く、その直径は無視できるとする。電場を求めよ。

[問題 4] 電荷が密度 ρ [C/m^3] で半径 a の円柱状に分布している。円柱は無限に長いとして、その内外での電場を求めよ。

[問題 5] 電荷が密度 σ [C/m^2] で無限に広い平面上 (平らな平面) に分布している。そのときの電場を求めよ。

4.1　レポート提出要領

　提出方法は、次の通りとする。

期限	6 月 10 日 (木)PM1:00 まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト、または講義開始時に手渡し
表紙	表紙を 1 枚つけて、以下の項目を分かりやすく記述すること。 授業科目名「電磁気学特論」 課題名「課題　ガウスの定理 (積分形)」 生産システム工学専攻　学籍番号　氏名 提出日
内容	問題の解答。計算課程をきちんと書くこと。

参考文献

[1] 山本義隆. 新・物理入門¡物理 IB・II. 駿台受験シリーズ. 駿台文庫, 1987.