ベクトル解析 (練習問題)

山本昌志[*]

2005 年 5 月 27 日

1　ベクトルの和と差及びスカラー倍

(1) まずは、小手調べとして、次のベクトルの和 ($\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$) と差 ($\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$) を計算せよ。ただし、和と差は 2 通りの方法、

- 成分同士の和を計算する方法。
- 図形により、ベクトルをつなぐ方法。

で計算すること。そして、これらが等しいことを確認せよ。

$$
\begin{array}{lll}
(a) & \boldsymbol{A} = (1,2,0) & \boldsymbol{B} = (3,1,0) \\
(b) & \boldsymbol{A} = (1,1,0) & \boldsymbol{B} = (4,1,0)
\end{array}
$$

(2) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ が与えられているとき、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ はどのようにすれば求められるか?

[*]国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

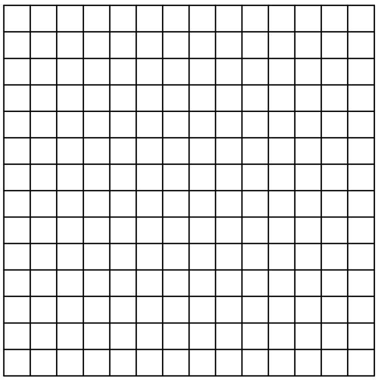

図 1: (1) の和

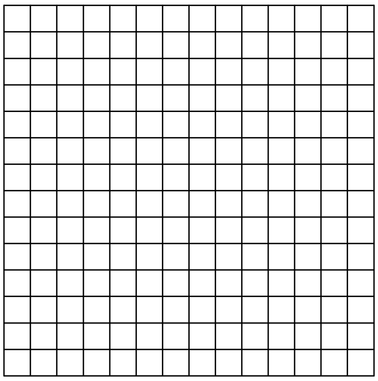

図 2: (1) の差

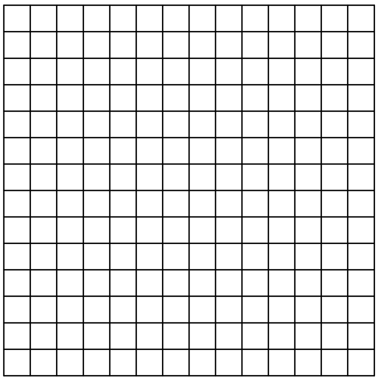

図 3: (2) の和

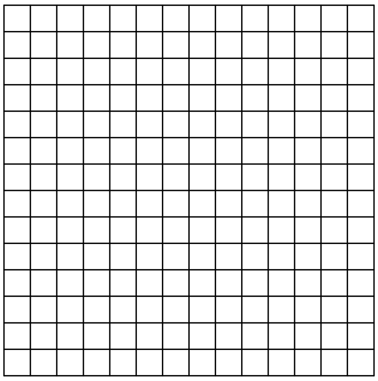

図 4: (2) の差

2 スカラー積とベクトル積

(1) $\boldsymbol{A} = (a_x,\, a_y,\, a_z)$、$\boldsymbol{B} = (b_x,\, b_y,\, b_z)$ の時、$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を示せ。

(2) $\boldsymbol{A} = (1,\, 2,\, 3)$、$\boldsymbol{B} = (4,\, 5,\, 6)$ のとき、スカラー積 $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ とベクトル積 $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ および $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A})$ を計算せよ。さらに、スカラー積の演算結果からそれぞれベクトルのなす角を計算せよ。同様にベクトル積の演算結果からそれぞれのベクトルのなす角を計算せよ。

(3) $\boldsymbol{A} = (1,\, 0,\, 0)$、$\boldsymbol{B} = (0,\, 1,\, 0)$ のとき、内積 $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ と外積 $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ および $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A})$ を計算せよ。

(4) $\boldsymbol{A} = (1,\, 0,\, 0)$、$\boldsymbol{B} = (1,\, 0,\, 0)$ のとき、内積 $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ と外積 $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ および $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A})$ を計算せよ。

(5) 余弦定理をスカラー積の演算を利用して、証明せよ。ヒント：図 5 を見よ。

(6) 正弦定理をベクトル積の演算を利用して、証明せよ。ヒント：図 5 を見よ。

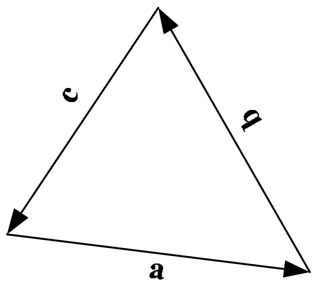

図 5: 三角形をベクトルで表す。

3 微分

(1) スカラー場 $f(x,\, y,\, z)$ があるとき、その勾配 $\boldsymbol{\nabla} f$ の各成分を示せ。

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ のカーテシアン座標系の各成分を示せ。

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさの勾配を示せ。

(4) $\boldsymbol{A} = (a_x,\, a_y,\, a_z)$ の時、$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ を示せ。

(5) 以下を確認せよ。

$$(a)\quad \boldsymbol{\nabla}(\log r) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$
$$(b)\quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r} = 3$$
$$(c)\quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 0$$
$$(d)\quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{r} = 0$$
$$(e)\quad \boldsymbol{\nabla} \times (r^n \boldsymbol{r}) = 0$$
$$(f)\quad \boldsymbol{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

(6) 次のベクトル場は、図 6〜11 のどれに対応するか分かるか?。ただし、分かりやすくするために、ベクトルの大きさはスケールされている。

$$(a)\quad \boldsymbol{A} = \left(0,\, \frac{1}{1+x^2},\, 0\right)$$
$$(b)\quad \boldsymbol{A} = (x,\, y,\, 0)$$
$$(c)\quad \boldsymbol{A} = (y,\, x,\, 0)$$
$$(d)\quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}(y,\, -x,\, 0)$$
$$(e)\quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}(y,\, -x,\, 0)$$
$$(f)\quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}(-x-y,\, x-y,\, 0)$$

(7) 図 6〜11 のうち、$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ あるは $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ のものはどれか?。まずは、計算をしないで考えよ。その後、計算を行い確認せよ。

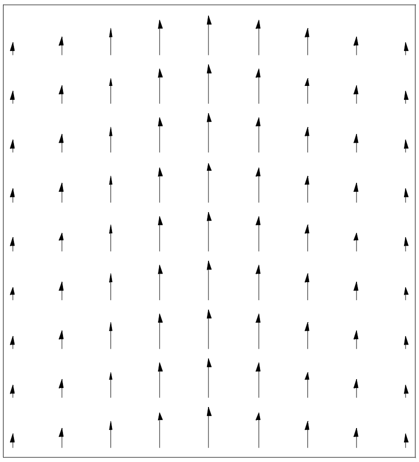

図 6:

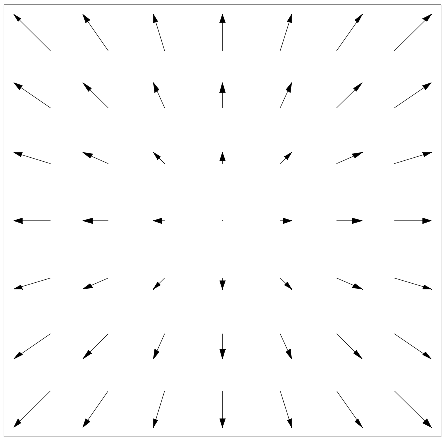

図 7:

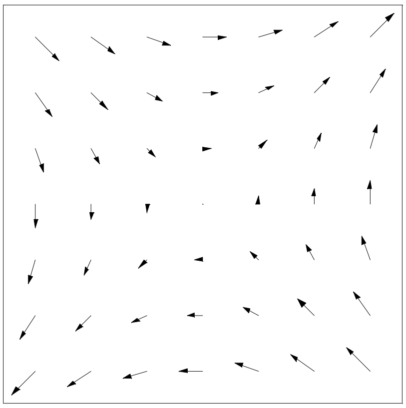

図 8:

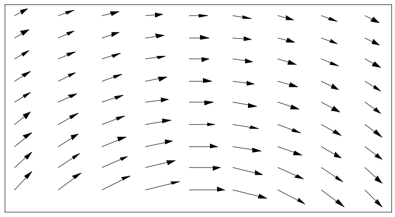

図 9:

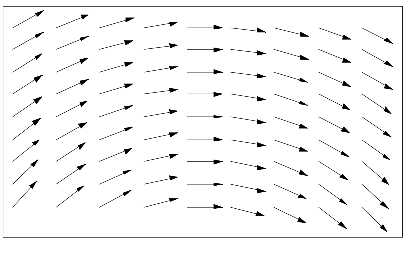

図 10:

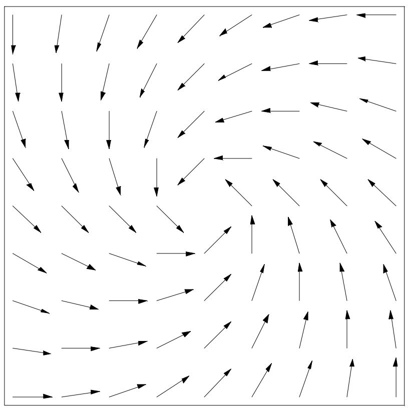

図 11:

4 積分

(1) S を任意の閉じた面とすると、

$$\frac{1}{3}\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s = V$$

を示せ。ただし、$\boldsymbol{n}$ は閉じた面の外向きに向かう法線ベクトル、V は閉じた面の体積である。