ベクトル解析2(ベクトルの乗算)

山本昌志*

2005年5月6日

1 本日の授業内容

先週は、ベクトルというものを定義して、その加算の演算を説明した。本日は乗算について説明する。内容は、以下のとおりである。

- 内積 (スカラー積)
- 外積 (ベクトル積)

2 内積 (スカラー積)

2.1 内積が現れる演算

エネルギーは、「力 $\times$ 距離」とよく表現される。例えば、重力場に質量 m の物体があり、それを垂直に r だけ手で移動させたとする。実際には、物体は鉛直方向に重力により引っ張られており、その力は mg である。その力に抗して、手はそれと同じ大きさで反対方向に力 F を加え、物体を r 引き上げたことになる。この場合、この物体の位置エネルギー (ポテンシャル) の増加 ΔU は、Fr となるのは力学で学習したとおりである。

今度は、先ほどと同じ距離で、物体を真横に移動させたとする。この場合、位置エネルギーの変化 ΔU はゼロである。また、斜めに移動させた場合は、$\Delta U = Fr\cos\theta$ となる。これは、高さの変化分が、位置エネルギーの変化になるからである。手の力の方向は、この3とおりの場合まったく同じで、垂直方向である。この垂直方向の力 F と移動方向との角度を θ とすると、3通りとも同じ式

$$\Delta U = Fr\cos\theta \tag{1}$$

でエネルギーの変化をあらわすことができる。

ちょっと余談であるが、これまで、3通りの方法で物体を移動させた。図を見て分かるように、物体を移動させるとき手にかかる力は同じである。同じ力なのに、移動方向が違うのである。厳密に考えると、移動が始まる瞬間に加速度が生じその力が本当は必要なのであるが、ここでは無視している。ゆっくり、本当に

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

ゆっくり移動させたことを考えるのである。もう少し思考実験を進めると、手と物体との間にばね秤をつけると、力の様子が分かる。本当にゆっくり動かせば、3 通りの移動ともばね秤が示す重さは m で力が同じであることが分かるであろう。

話は元に戻るが、力と物体の移動量はベクトル量なので $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{r}$ と書いたほうが格好良い[1]。そうすると、位置エネルギーの変化は、

$$\Delta U = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta \tag{2}$$

となる。この式の右辺が内積 (スカラー積) の演算である。

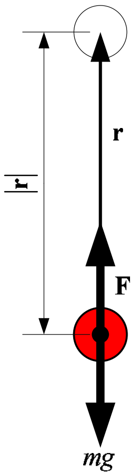

図 1: 垂直方向への移動

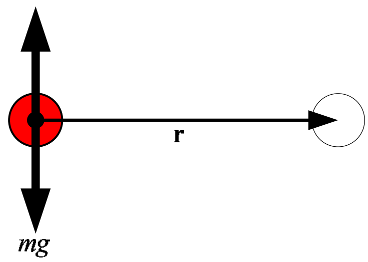

図 2: 水平方向への移動

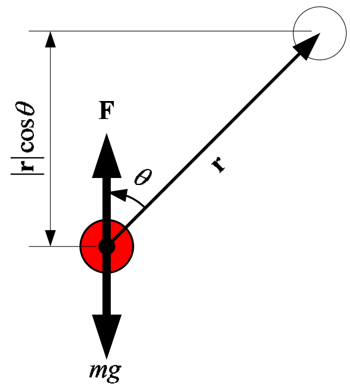

図 3: 斜めへの移動

2.2　ベクトル量 (復習)

スカラー積を学習する前に、ベクトルとスカラーの定義を示しておくのが良いだろう。

前回の授業で示したように、ベクトルの成分は座標軸に依存している。座標軸が異なると、その 3 成分は異なる。座標軸を回転させた場合、ベクトルの成分の変換は、座標系の変換と同じである。具体的には、座標系を $(x, y, z) \to (x', y', z')$ と回転させる。この回転を

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3}$$

と行列を用いて表現する[2]。(x, y, z) 座標系の時のベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分を (E_x, E_y, E_z)、(x', y', z') 座標系で

[1] 先ほどはノーマル書体で書きスカラー量のように取り扱ったが、ベクトル量なのでボールド書体で書いた。
[2] 3 次元の回転を表す行列の具体的な形は、オイラーの角を勉強せよ。

は (E'_x, E'_y, E'_z) とする。これらの成分の関係は、

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{4}$$

となる。式 (3) と式 (4) を見て分かるように、回転に対して座標の変換とベクトルの成分の変換は全く同じように取り扱われるのである。このように座標の回転と同じように、その成分が変換されるものをベクトルと定義する。これは、ベクトルが、空間に固定された幾何学的な矢と思えば当たり前のことである。

2.3 スカラー量

スカラー量は、座標の回転により変化しない量と定義する。たとえば、ベクトルの大きさの 2 乗

$$|\boldsymbol{E}|^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \tag{5}$$

はスカラー量である。この量は座標系の回転に関係なく一定の値である。ベクトルは空間に固定された矢であり、その長さの 2 乗であるから当然のように思える。実際にそれを確認してみよう。式 (3) と式 (4) の回転を表す行列とベクトルを

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{6}$$

と表現する。すると、$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$ である。そして、$|\boldsymbol{E}|^2 = \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}$ である。回転後の座標系でのベクトルの大きさの 2 乗は

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{E}'|^2 &= \boldsymbol{E}'^T\boldsymbol{E}' \\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{E})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{E} \\ &= \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{E} \\ &\qquad \text{付録より } \boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{A}^{-1} \\ &= \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E} \\ &= \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E} \\ &= |\boldsymbol{E}|^2 \end{aligned} \tag{7}$$

となる。回転前後で、ベクトルの大きさは変化しない。従って、これはスカラー量である。

スカラー量は座標系が回転しても、その値は変わらない。このように回転に対して不変な量をスカラー量と定義する。あるスカラー量 ϕ が与えられたとすると、この場合、座標系を言う必要はない。空間のある点の温度は、座標系を回転させても変化しない。ベクトルの成分の場合、座標軸が異なるとそれは変化するのと大きな違いである。

2.4　内積 (スカラー積) の定義

ベクトルの大きさの計算と全く同じようにして、ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の積、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{8}$$

もスカラー量であることが示される。この演算を内積の定義とする。この定義から、$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ であることが直ちに分かる。

ここで、座標を回転させて、新しい x 軸を $\boldsymbol{A}$ の方向にすると、

$$A_x = |\boldsymbol{A}| \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0 \tag{9}$$

$$B_x = |\boldsymbol{B}|\cos\theta \qquad B_y = |\boldsymbol{B}|\cos\zeta \qquad B_z = |\boldsymbol{B}|\cos\eta \tag{10}$$

となる。θ, ζ, η はそれぞれの軸との方向余弦である。従って、内積の定義より、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{11}$$

となる。θ はベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度と考える。これを内積の第二の定義と考えることができる。実際には、式 (8) と式 (11) の簡単な方を使えば良い。

本日、最初に示した位置エネルギーの変化 $\Delta U = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta$ は内積の演算になっていることが分かる。

$$\Delta U = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} \tag{12}$$

そして、これはスカラー量となる。エネルギーはスカラー量なので当然の結果である。

最後に x, y, z 軸の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の内積の演算を示しておく。

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1 & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0 & \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0 & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1 & \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0 & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = 0 & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \end{array} \tag{13}$$

[**練習 1**] 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積が、スカラー量であることを示せ。

[**練習 2**] 内積の演算を利用して、ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ の間の角度を求めよ。

3　外積 (ベクトル積)

3.1　ベクトル積が現れる演算

角運動量は、「回転中心からの距離 × 運動量」である。例えば、図 4 の場合を考える。ある質点が y 軸に沿って運動しているとする。自由運動の場合、角運動量は変化せず、図中の 3 点で同一である。原点の z 軸周りの角運動量は

$$L_z = |\boldsymbol{r}||p_y|\sin\theta \tag{14}$$

である。エネルギーとは異なり、今度は sin がかかっている。このようなベクトルのかけ算に外積 (ベクトル積) がしばしば現れる。このように sin がかかることにより角運動量が一定であることがわかる。

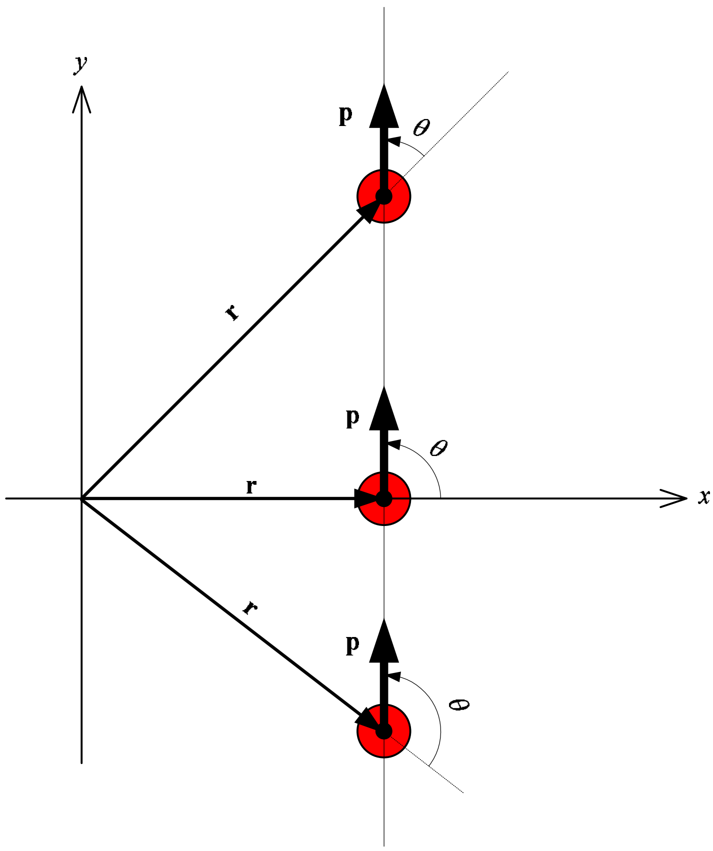

図 4: 角運動量

3.2　ベクトル積の定義

角運動量やトルクなどを取り扱う場合に便利なようにベクトル積を定義する。それは、

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{15}$$

と書かれる。演算の結果の $\boldsymbol{C}$ はベクトルである。その大きさは、

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta \tag{16}$$

とする。ここで、θ はそれぞれのベクトルの間の角度である。一方、その方向は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の定める平面に垂直で、$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が右手系を作る向きとする。このように方向を定めると、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{17}$$

となる。積の順序を入れ替えると、符号が反対になるのである。内積の場合と異なり、かけ算の順序は重要となる。

ベクトル積の幾何学的な意味を考えよう。式 (15) の演算は、図 5 のようになる。$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で定まる平行四辺形の底面を $\boldsymbol{A}$ とすると、高さは $|\boldsymbol{B}|\sin\theta$ となる。従ってその面積は、$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ と直ちに分かる。これは、$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$ に等しい。このことから、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ のベクトル積は、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で定まる平行四辺形の面積を大きさとして、その平行四辺形の平面に垂直な方向のベクトルという幾何学的な意味があることが理解できる。

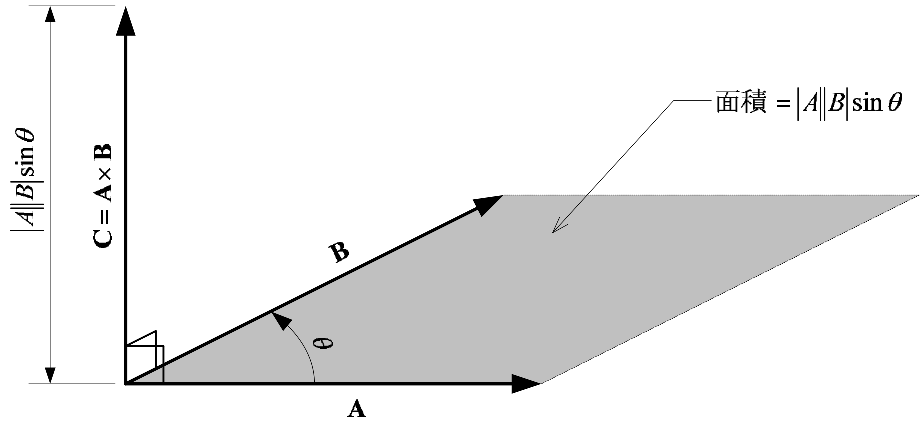

図 5: ベクトル積の幾何学的意味

定義から、単位ベクトル同士のベクトル積の演算は簡単に求めることができる。x, y, z 軸の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の演算は、次のとおりである。

$$
\begin{array}{lll}
\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0 & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=k & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-j \\
\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-k & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0 & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=i \\
\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=j & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-i & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0
\end{array}
\tag{18}
$$

これは、$\boldsymbol{i}\to\boldsymbol{j}\to\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{i}\cdots$ のようにサイクリックに変化し、この方向にベクトル積をかける場合は正、反対の場合は負と覚える。

これを使って、ベクトルの成分で考える。ベクトル $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$ のベクトル積は、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}=&\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\\
=&(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\times(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})\\
=&A_xB_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+A_xB_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+A_xB_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+\\
&A_yB_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+A_yB_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+A_yB_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+\\
&A_zB_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+A_zB_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+A_zB_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})+\\
&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_z)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となる。これから、ベクトル積の演算を成分で表すと

$$
\begin{aligned}
C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\
C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\
C_z &= A_x B_y - A_y B_z
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となる。この式は、覚えにくいので、行列式を用いて

$$
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{21}
$$

と表すことがよくある。この行列式を用いた表現は便利なので覚えておく方が良いだろう。

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ がベクトルになることの証明はしていない。座標軸を回転させた場合のその成分の振る舞いを考えなくてならない。興味がある者はトライしてみるのが良いだろう。ここでは示さないが、このベクトル積の計算結果はベクトルになるのはたしかである。

[練習 1] $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ と $\boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ のベクトル積を求めよ。

[練習 2] $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。。

4 課題

4.1 講義欠席者向け

- 全ての練習問題を解け。分からない場合は、私のところへ質問にくること。

5　付録

5.1　回転を表す行列について

回転を表す行列の性質を調べる。後々の都合を考えて、カーテシアン座標系を $(x,\, y,\, z)$ の代わりに $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ で表すことにする。座標の回転により、座標は $(x_1,\, x_2,\, x_3) \to (x_1',\, x_2',\, x_3')$ と、ベクトルの成分は $(E_1,\, E_2,\, E_3) \to (E_1',\, E_2',\, E_3')$ と変換される。これらの変換は行列を用いて、

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

と表すことができる。これをいちいち成分で書かずに、$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ や $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$ と書く。$\boldsymbol{A}$ が回転を表す行列である。この行列の性質を少し考えてみよう。

回転を表す行列の成分 a_{ij} は、i 軸と j 軸の方向余弦を表している。これは、2 次元の回転を考えれば簡単に分かる。2 次元の回転は、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

となる。これと、図 6 から、回転を表す行列の成分は軸の方向余弦であることが分かる。方向余弦はその方向の成分を表すのであるから当然であろう。

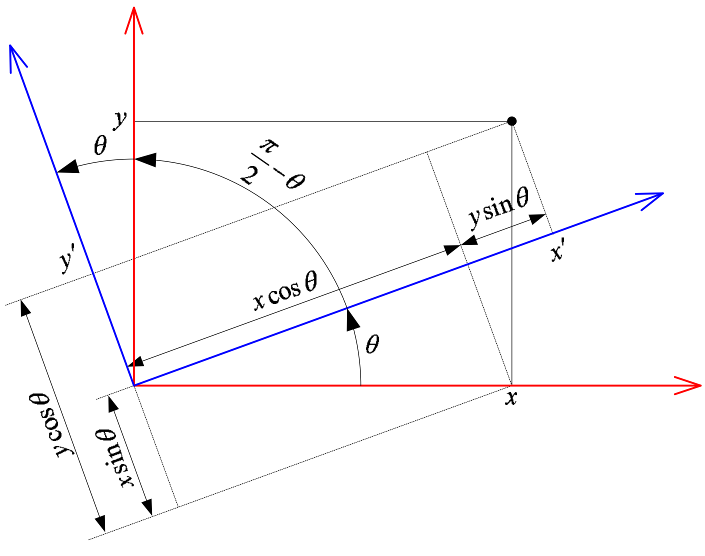

図 6: 座標軸の回転

これらのことから、a_{ij} はプライムがつく i 軸とプライムが付かない j 軸の方向余弦を表す。従って、

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \tag{24}$$

$$x_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x'_i \tag{25}$$

となる。これらの式のうち、前者は式 (22) を表す。後者の式は、i と j を入れ替えると、

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji} x'_j \tag{26}$$

となる。回転の行列が転置行列になっていることが分かるであろう。すなわち、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \tag{27}$$

である。これらのことから、座標軸が回転した場合の座標やベクトルの変換は簡単に表すことができる。すなわち、

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}' \tag{29}$$

のようにである。

これらの式を比べると、重要な結果

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T \tag{30}$$

が得られる。

[**練習 1**] 2 次元カーテシアン座標系の回転を表す行列の逆行列を求めよ。

[**練習 2**] その逆行列は、元の行列の転置行列になっていることを示せ。。