時間的に変動する電場と磁場

山本昌志[*]

2005 年 8 月 26 日

1　本日の授業内容

今までは、静電場や静磁場の話であった。これは、電場や磁場がいつでも一定で、時間的に変化しない状態について説明した。通常電場と磁場は、場所 $\boldsymbol{r}$ と時刻 t の関数であるが、時刻が変わっても、それらが変化しないような状況が、静電磁場の話であった。この場合、静電磁場が一定であることは、その源も時間的に変化していないと言うことである。

これからは、静電磁場が時間的に変化する状況を考える。本日の学習内容は以下の通りである。

- 電荷保存と変位電流
- ファラデーの電磁誘導の法則

2　電荷保存則と変位電流

2.1　静電磁場の復習

静電磁場を拡張して、時間変動の項を取り扱うのが分かりやすくて良いだろう。そのために静電磁場の復習をする。

静電場と静磁場はともにベクトル場である。ベクトル場を記述する微分方程式の完全な組は、その発散と回転であることは以前に示したとおりである。そこで、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の発散と回転を示すことにする。

2.1.1　静電場の場合

2 つの電荷があるとそれぞれは力を及ぼしあい、その力について述べたものがクーロンの法則である。図 1 のように 2 つの電荷がある場合、Q_2 の電荷が Q_1 に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{21}$ は、

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3} \tag{1}$$

となる。これがクーロンの法則で、それは、

[*]国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

- 力の大きさは、それらの距離の 2 乗に反比例し、電荷量の積に比例する
- 力の方向は、2 つの電荷を結ぶ直線状で、同じ電荷同士の場合は斥力で、異なる電荷であれば引力となる

と言っているのである。これから、直ちに作用・反作用の法則が成り立っていることが分かる。

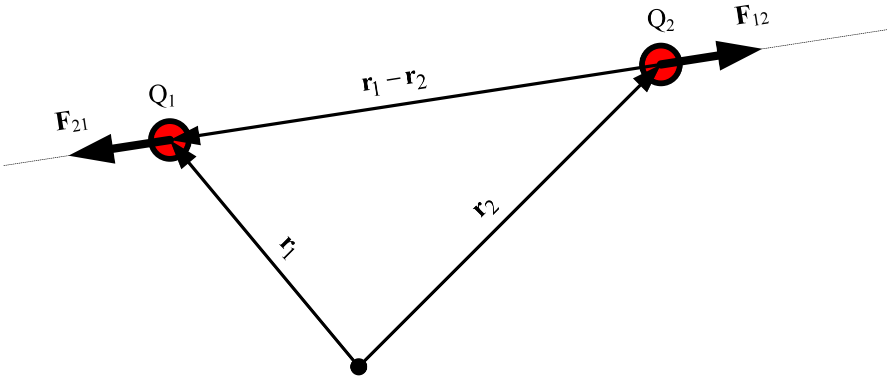

図 1: クーロン力

これが静電場のすべてで、どんな問題でもこれを計算すれば原理的に解ける。宇宙全体の電荷をすべて計算すればよいのであるが、それは実際的でない。そのため、いろいろと数学的な工夫がなされた。ただ、数学的に式を変形したと思ってはならない。かなり重要な概念が導入されることになる。

導入された概念のうち最も重要なものは、場の概念である。このクーロンの法則から静電場と言うものが考えられる。電荷が静電場を作り、その静電場が電荷に力の作用を及ぼすのである。先のクーロンの法則から、電荷 Q_2 は $\boldsymbol{r_1}$ の位置に E_2 と言う電場を作るのである。この電場が電荷 Q_1 に作用して、$\boldsymbol{F}_{21}$ という力を及ぼすのである。これは、

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}_{21} = Q_1\boldsymbol{E}_2 \tag{3}$$

と書くことができる。これらの式は、式 (1) とまったく同じと思えるかもしれない。しかし、決定的に異なることがある。式 (1) は遠隔力で、何もない空間を通して力が 2 つの電荷間にに作用している。一方、式 (2) や式 (3) は近接作用となっており、電荷は場を変化させて、その場の変化が力を生み出していると考える。

式 (2) から、$\boldsymbol{r}'$ の位置にある電荷 Q が $\boldsymbol{r}$ の位置につくる電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \tag{4}$$

となる。電場は距離の 2 乗に反比例することから、電荷を囲む面積分は

$$\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

となることは以前学習したとおりである。これをガウスの法則と言う。点電荷 Q ではなくて連続的に密度 ρ で分布していると考えると

$$\int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \mathrm{d}V \tag{6}$$

となる。この左辺にガウスの定理、$\int \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$ を適用する。そうすると両辺の積分はどちらも体積積分に直すことができ、この等式はどのような領域でも成り立つので、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

が得られる。これでベクトル場の発散が得られた。

次にベクトル場の回転を求めるわけであるが、これも以前述べたように電場の線積分は経路によらないと言うことから簡単に分かる。経路によらないことから、任意の閉じた経路での線積分は常にゼロとなる。そのため、回転は常にゼロである。従って、

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{8}$$

となる。

これで、静電場の発散と回転が求められたことになり、微分方程式が得られたのである。ただし、実際のマクスウェルの方程式の場合、電束密度 $\boldsymbol{D}$ というものを導入して、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{10}$$

と書かれるのが普通である。勿論、電束密度と電場の間には、$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ と言う関係があることは言うまでもないであろう。

2.1.2 静磁場の場合

つぎに静磁場 $\boldsymbol{B}$ を考える。静電場の場合、電場を作るものは電荷であった。それに対して、静磁場の場合の磁荷というものは発見されていない。従って、磁場の発散はつねにゼロである。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{11}$$

実際に磁場を作るものは電流である。1 本の無限に長い電流 $\boldsymbol{I}$ が作る磁場は、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{12}$$

となる。磁場は半径に比例するため、電流を内部に含む閉じた曲線の線積分は

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I \tag{13}$$

となることは以前述べたとおりである。ここの電流 I は積分路の内側である。これが連続的に、密度 $\boldsymbol{j}$ で分布していると考えると、

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{14}$$

となる。ここで、ストークスの定理、$\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int \nabla \times \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ の出番である。これを式 (14) の左辺に適用する。すると両辺とも面積分になる。この面積分は任意の領域で成り立つ。したがって、両辺の被積分関数は等しくなくてはならない。すなわち、

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{15}$$

である。これで、磁場、正確には磁束密度の回転が得られた。先ほどの発散と合わせて、磁束密度を記述するベクトル場の方程式が得られたのである。実際には、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ には、$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ と言う関係があるので、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{17}$$

と書かれる場合が多い。

2.2 高周波電磁場と静電磁場

今までの話は、静電磁場で時間的に何も変化しない場合を考えてきた。これからは、時間的に電荷や電流が変する場合を考察する。電荷や電流が変化すると電磁場の変化するわけで、その関係を調べることになる。とはいえ、最終的には先の発散や回転の微分方程式に、時間の項を含めるのである。

2.3 電荷の保存則

電荷は自然に発生したり、消滅することはない。このことは、電荷の総量は時間的に変化しないと言っている。電子と陽電子が衝突して、光になっても、総量は変化していない。この反応の場合、+e と-e が反応して電荷ゼロの光子ができるので、電荷が消滅したと思うかもしれない。しかしながら、反応前の電荷の総量はゼロで反応後もゼロであり、やはり総量は変化していない。このように電荷が消滅するときには、同じ電荷量で符号が反対のものも同時に消滅するのである。これは電荷の発生の時も同じである。

このようなことから、ある任意の体積中の電荷量が変化するためには、それはその体積を囲んでいる壁を通して電荷の移動が起きなくてはならない。電荷の移動は電流そのものである。したがって、ある任意の体積中の電荷の総量の変化は、その壁を通しての電流の流れの積分に等しくなる。このことから、単位時間あたりの電荷の総量の変化は、壁を通して流れる電流の積分に等しくなる。いつものように、任意体積の外側に向かった法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると、これらの関係は

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{18}$$

となる。この式の右辺にいつものようにガウスの定理を使うと、

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho \mathrm{d}V = \int \nabla \cdot \boldsymbol{j}\mathrm{d}V \tag{19}$$

が得られる。この積分が任意の領域で成り立つことと、電荷密度は場所と時間の関数であることを考えると、

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{j} \tag{20}$$

となる。これは電荷の保存則を微分方程式で表したものである。この微分方程式は、$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ と書き、連続の式とも呼ばれる。

2.4 マクスウェルの変位電流

静電場を表す 4 つの式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{21}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{22}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{23}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{24}$$

から始めることにする。静電磁場の場合、これらの式はまったく矛盾なく成立している。電磁場も電荷も電流もいつでも一定で、場所だけの関数であり、電場および磁場がそれぞれ独立したペアとして存在している。電場のペアは、電場 $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$、電荷 $\boldsymbol{\rho}$ である。磁場のはペアは、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁場に強さ $\boldsymbol{H}$ と電流 $\boldsymbol{j}$ である。この場合でも、先ほどの電荷の保存則は成り立つ必要はあるが、時間微分の項はゼロとなるので、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{25}$$

が成立すれば良い。これに関係するのは、式 (24) だけで、矛盾なく成り立っている。この式の両辺の発散を取ると、左辺は回転の発散で、これは恒等式でゼロとなる。

これからは、電磁場と電流および電荷が時間的に変化する場合を考える。まずは、電荷の保存則が成り立つ必要がある。もちろん、静電場の式も満足しなくてはならない。それでは、式 (24) の両辺の発散を取ってみよう。この場合、左辺は恒等式でゼロで、右辺は

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{j} \tag{26}$$

となり、電荷の保存則を満足しない。そこで、仮に式 (24) の発散が

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{27}$$

と書き換えたとする。そうすると、この式は電荷の保存則を満足する。これでも良いが、さすがに式が複雑である。そこで、式 (21) を用いて、少し式を書き換えることを考える。少しばかり変形すると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) \\ &= \nabla \cdot \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \end{aligned} \tag{28}$$

となる。この結果から、

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{29}$$

としても良いだろう。

式 (29) は良さそうであるが、式 (21) もまた、電荷保存則を満足する必要がある。そこで、この式の時間微分を考える。時間微分を取り、左辺と右辺を入れ替えると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot D) \\
&= \nabla \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \\
&\qquad \text{式 (29) を用いると} \\
&= \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{j}) \\
&= -\nabla \cdot \boldsymbol{j}
\end{aligned} \tag{30}
$$

となる。これは、電荷保存則そのものである。従って、式 (29) のようにすると、式 (21) はそのままで電荷保存則を満足している。これでめでたし、めでたしである。

式 (29) の追加された項、$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ は変位電流あるいは電束電流と呼ばれ、天才マクスウェルが導入したのである。

3 ファラデーの電磁誘導の法則

電荷保存の法則を満たすようにできたが、電磁場の時間変化をちゃんと記述する式には不十分である。磁場が変化したとき電場が発生する電磁誘導の法則を加えなくてはならない。以下、そのことについて述べる。

3.1 電磁誘導 (積分形)

エルステッドは電流が磁場を作ることを発見した。このことを聞いたファラデーは磁場が電流をつくると考え実験を行った。正確ではないが、図 2 のような回路で実験をした。まずは、閉回路 A に電流を流す。すると、鉄心の中に磁場が発生する。そして、最初、ファラデーは閉回路 B に電流が流れると考えた。しかし、期待とは裏腹に電流は流れなかった。いろいろ実験をしているうちに、閉回路 A のスイッチを ON や OFF した瞬間に、電流が流れることに気づいた。

閉回路 B に電流が流れるのは、オームの法則により回路内に電圧が発生するからである。この電圧を誘導起電力といい、それは回路を貫く磁束 ϕ の時間的な変化に比例する。そして、その符号は、誘導起電力によって発生した誘導電流による磁束が回路を貫く磁束の変化を妨げるようになる。これを Lenz の法則という。もっと簡単に Lenz の法則を述べると、

- もし、回路内の磁束が増加するように外部から磁場を与えると、その回路内の磁束を減少するように誘導電流が流れる。

- もし、回路内の磁束が減少するように外部から磁場を与えると、その回路内の磁束を増加するように誘導電流が流れる。

である。要するに、誘導電流は回路のトータルの磁束の変化を妨げるのである。これは、誘導起電力 $\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$

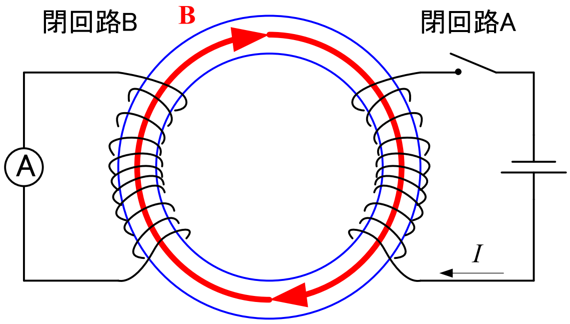

図 2: ファラデーの電磁誘導の実験

とすると

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{31}$$

と記述出来る。

ファラデーは閉回路 B がなくても、閉回路 A は電場を作ると考えた。この考えを単純にすると、図 3 のようになる。もっと単純化すると、閉回路 A がなくても、磁場が変化すれば電場ができると考えることもできる (図 4)。これは、最初の実験からかなり飛躍しているが、さまざまな検証の結果正しいと言うことがわかっている。したがって、式 (31) は導体がある閉じた回路ではなく一般的な電磁場について成り立つことになる。電磁場のみで記述すると、

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{32}$$

となる。これが積分形の Faraday の法則である。

3.2 微分形のファラデーの法則

今まで学習してきたとおり、積分形は物理量を求める場合には都合がよいが、理論的な取り扱いには不便である。そこで、先ほどの積分形の Faraday の法則である式 (32) を微分形に直しておく。そのためには、いつものストークスの定理 $\oint \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ を使えばよい。式 (32) の左辺にストークスの定理を適用し、右辺の時間微分を積分の中に入れると、

$$\int \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{33}$$

となる。この積分は、いつでも、どこでも、どんな領域でも成り立つ。これが成り立つためには、左右の被積分関数が等しくなくてはならない。すなわち、

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{34}$$

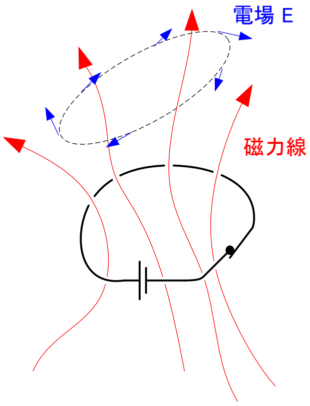

図 3: 電流の変化が磁場の変化を引き起こし、それが電場を作る。

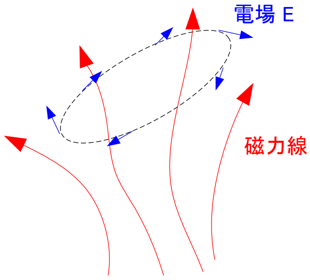

図 4: 磁場の変化が電場を作る。

である。これが微分形の電磁誘導の法則である。

もちろん、この式には電荷密度 ρ や電流密度 $\boldsymbol{j}$ は関係していないので、電荷保存の法則を書き換えることはない。

4 マクスウェルの方程式

ここでは、静電場を記述する式から出発し、電荷保存則と Faraday の電磁誘導の法則が成り立つように、電磁場の発散と回転の式を拡張した。これにより、電磁場 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H})$ 及び、電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ の全ての変数が時間の項を含ませることができる。他に法則はなく、これだけである。全て書き出すと、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{35}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{36}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{37}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{38}$$

となる。ただし、電磁場がある媒質の性質を決める誘電率 ε と透磁率 μ をとおして、

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{40}$$

の関係がある。

もう一度言うが、全ての変数は位置 $\boldsymbol{r}$ と時間 t の関数となっている。これが電磁場を記述する完全な方程式である。これが計算できれば全ての電磁気の問題は解けることになる。