磁荷に作用する力

山本昌志*

2005年7月15日

1　本日の授業内容

本日は静磁による力の話をする。。本日の学習内容は以下の通りである。

- アンペールの力
- ローレンツの力
- 磁荷に作用する力

2　電流にはたらく力

2.1　直線電流に働く力

無限に長い直線電流どうしに働く力を考える。そのために、それが作る磁場を計算する。磁場は微分形のアンペールの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{1}$$

から導くのが簡単である。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ は、

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{2}$$

の関係がある。これを用いると、

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{3}$$

となる。この直線電流から、r 離れた場所で積分を行う。

$$\int \nabla \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int \mu_0 \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

左辺にストークスの定理を応用すると

$$\oint \nabla \times B \cdot \mathrm{d}\ell = \mu I_2$$

$$2\pi r B = \mu I_2 \tag{4}$$

*国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

これから、磁束密度は

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \tag{5}$$

となる。この磁束密度は元々、力から定義されていた。図 1 のように置かれた電線が単位長さ当たり受ける力は、

$$\begin{aligned} F &= I_1 B \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \end{aligned} \tag{6}$$

となる。

式 (6) に示した力は平行に導線を張った場合に働く力である。それに対して、平行でない場合は、

$$\Delta F = I \Delta \ell \times \boldsymbol{B} \tag{7}$$

となる。これをアンペールの力と言う。

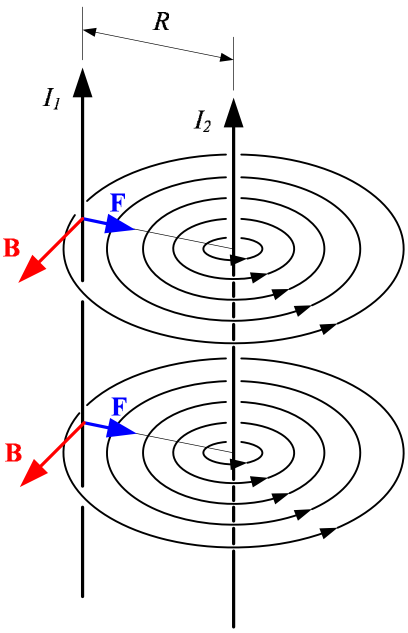

図 1: 2 本の平行導線に働くアンペールの力

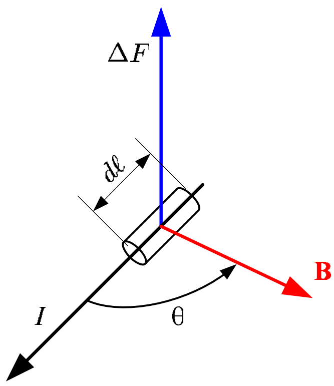

図 2: 電流要素に働くアンペールの力

2.2 長方形コイルに働く力

教科書の図 6.2 に書いてある通り、コイルの上下方向の力は、反対で一直線上にある。したがって、コイルの重心を移動させる力は発生しない。トルクはどうだろうか?。ゼロであることは直ちに理解できる。上

下方向の力をそれぞれ、$\boldsymbol{F}$ と $-\boldsymbol{F}$ とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F} \\ &= (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F} \\ &= 0\end{aligned} \tag{8}$$

となる。直感の通り、ちゃんと計算してもコイルの上下方向の働くトルクは、キャンセルされる。

左右方向はどうだろうか?。力の大きさが反対なので、重心を移動させる力は発生しない。しかし、トルクは発生する。左右方向の力をそれぞれ、$\boldsymbol{F}$ と $-\boldsymbol{F}$ とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{r}_4 \times \boldsymbol{F} \\ &= (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_4) \times \boldsymbol{F}\end{aligned} \tag{9}$$

となる。ここで、$(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_4)$ は図の A から B へ向かうベクトルに等しい。したがってトルクの大きさは、

$$N = Fa\sin\theta \tag{10}$$

となる。方向は、コイルの左右の線と力との双方に垂直な方向である。また、力はアンペールの法則より、$F = IbB$ なので、トルクの大きさは、

$$\begin{aligned}N &= IBab\sin\theta \\ &= IBS\sin\theta\end{aligned} \tag{11}$$

となる。ここで、S はコイルの面積である。このトルクを表す式は、コイルが平面であればどんな形状のものでも成り立つ。

3　ローレンツの力

3.1　荷電粒子に働く力

電場中の荷電粒子は、

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{12}$$

という力を受ける。これが電場の定義と考えて良い。次に考えるのは磁場中であるが、我々はアンペールの力の法則しか知らない。これから導くことにする。ある断面を $\mathrm{d}t$ の時間、$\mathrm{d}Q$ クーロンの電流の電荷が流れる場合の電流は、

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

となる。導線の中の電流を担う電荷の単位長さ当たりの密度を N とする。導線中で、電荷は一様な速度 v で移動しているとすると、$\mathrm{d}Q = Nqv\mathrm{d}t$ となる。したがって、電流は、

$$I = Nqv \tag{14}$$

となる。この電流が流れている導線 (長さ ℓ) を磁場 $\boldsymbol{B}$ 中に入れると、

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F} &= I\mathrm{d}\ell \times \boldsymbol{B} \\ &= Nq\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\mathrm{d}\ell \end{aligned} \tag{15}$$

という力をうける。この中に、$N\ell$ の粒子があるので、粒子一つ当たりの力は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{Nq\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\mathrm{d}\ell}{N\mathrm{d}\ell} \\ &= q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{16}$$

となる。これが磁場中で、荷電粒子が受ける力を示す。電場と磁場の力を合わせて、

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{17}$$

となる。これが、電磁場中の荷電粒子が受ける力で、ローレンツ力と呼ばれる。

3.2 一様な静磁場内の粒子の運動

一様な磁場内での荷電粒子の運動を考える。ローレンツ力より、運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{18}$$

となる。力は磁場と速度の双方の直角方向に働いている。特に速度の直角方向に働いていることが重要である。速度の直角方向に力を受けるので、粒子は磁場からエネルギーを受けることはない。エネルギーは、力と移動方向の内積で、この場合

$$\begin{aligned}\Delta W &= \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{\ell} \\ &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\Delta t \\ &\qquad \boldsymbol{F} \text{ と } \boldsymbol{v} \text{ は直交しているから} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

となる。従って、運動エネルギーは一定で、速度の大きさも変化しない。もう少し想像力を働かせると、、荷電粒子は磁場に巻き付くようにらせんに運動することがわかる。ちゃんと計算したければ、円筒座標系を使って計算すれば、このことは直ちに分かるであろう。

次に、粒子の速度が磁場と垂直の場合を考える。この場合、らせんは進むことが無く、粒子は平面内を等速円運動する。円筒座標系の運動方程式は、

$$m\frac{v^2}{r} = evB \tag{20}$$

となる。速度 v は一定なので、回転半径は、

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{21}$$

となる。速度が大きくなれば回転半径は大きくなり、磁場を強くすれば回転半径は小さくなる。また、角速度は $v = r\omega$ から

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \tag{22}$$

となる。角速度は、粒子の速度に依存しないで一定の値となる。この ω をサイクロトロン角振動数と言う。

このように一様な磁場では、粒子の運動エネルギーに関係なく、一定の角速度で粒子は回転する。サイクロトロンと呼ばれる加速器は、この原理を利用している。粒子の回転周波数に応じた電場により加速して、高エネルギーの粒子を得る装置である。ただし、粒子のエネルギーが大きくなると、粒子の質量が大きくなり、回転周波数が変化する。そうすると加速ができなくなり、サイクロトロンの限界となる。

また、粒子が完全にいつも磁場と垂直の速度を持つことはあり得ない。ほんのちょっとの角度を持っても、らせん運動が発生して、上下の磁極の衝突する。これを防ぐために、実際のサイクロトロンでは上下方向に安定な運動するようにしている。これは、完全に一様な磁場を用いるのではなく、少し変化させている。興味がある者は調べよ。

3.3 ローレンツ力のパラドックス

これは、教科の書の通り。黒板に図を書いて説明する。

3.4 ローレンツ力と作用・反作用の法則

2 個の質点がお互いに及ぼし合う力は、大きさが等しく、かつ方向が反対方向である。これを作用・反作用の法則という[1]。この作用・反作用の法則が成り立つと、この系の運動量が保存される。この辺は力学の基礎なので、忘れた者は各自復習せよ。ここでは、ローレンツ力においても、作用と反作用の法則が成り立つか調べる。

図 3 のように 2 つの質点がお互いに作用を及ぼしあって、運動しているような状況を考える。明らかに電場による力は、作用反作用の法則を満たしている。一方、磁場の方はそんなに簡単ではない。一番手っ取り早いのは、作用・反作用の法則が成立しない例を示すことである。教科書の図 6.5 がその例になっている。

[1]質点が 2 個以上の場合は、力の合計がゼロになると言い換えればよい。

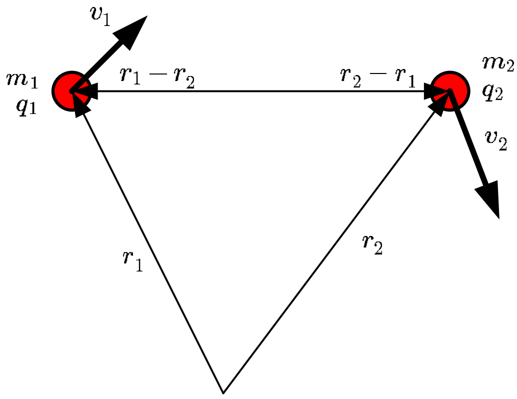

図 3: 電荷をもつ 2 個の質点の位置関係

4　磁荷に作用する力

4.1　閉電流と磁気双曲子の等価性

磁荷 q_m が作る磁場は

$$B = \frac{1}{4\pi}\frac{q_m}{r^2} \tag{23}$$

となる。$\pm q_m$ の磁荷を微少距離 s だけ離した磁気双極子の磁場を考える。図の z 軸上 ($\ell \ll z$) の磁場は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{q_m}{4\pi}\left[\frac{1}{(z-\ell/2)^2} - \frac{1}{(z+\ell/2)^2}\right] \\
&= \frac{q_m}{4\pi z^2}\left[\left(\frac{1}{1-\ell/2z}\right)^2 - \left(\frac{1}{1+\ell/2z}\right)^2\right] \\
&\quad \text{(　) 内を二項分解、すなわち無限級数の和に分解する} \\
&= \frac{q_m}{4\pi z^2}\left[\left\{1+\frac{\ell}{2z}+\left(\frac{\ell}{2z}\right)^2+\left(\frac{\ell}{2z}\right)^3+\cdots\right\}^2 - \left\{1-\frac{\ell}{2z}+\left(\frac{\ell}{2z}\right)^2-\left(\frac{\ell}{2z}\right)^3+\cdots\right\}^2\right] \\
&\quad \text{二次以上の微少量を無視すると} \\
&\simeq \frac{q_m}{4\pi z^2}\left[\left(1+\frac{\ell}{z}\right) - \left(1-\frac{\ell}{z}\right)\right] \\
&\simeq \frac{2q_m\ell}{4\pi z^3}
\end{aligned} \tag{24}$$

磁気双極子が作る磁場は、距離の 3 乗で小さくなる。単極子 (1 重極) は距離の 2 乗で、双極子 (2 重極子) は距離の 3 乗で小さくなる。

ここで、磁気双極子モーメント m を

$$m = q_m \ell \tag{25}$$

とする。この場合、z 軸上の磁場は、

$$B_z = \frac{1}{4\pi}\frac{2m}{z^3} \tag{26}$$

となる。

一方、半径 a の円電流が z 軸に作る磁場は、前回のビオ・サバールの法則を応用する問題で示したとおり、

$$B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{(z^2+a^2)^{3/2}} \tag{27}$$

となる。先ほど同様に、コイルから離れた場合 $(a \ll z)$ には、

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{(z^2+a^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}\frac{1}{\{1+(a/z)^2\}^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}\frac{1}{\{1+(a/z)^2\}^{3/2}} \\
&\quad \text{テイラー展開する} \\
&= \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{a}{z}\right)^4-\frac{35}{16}\left(\frac{a}{z}\right)^6+\cdots\right] \\
&\quad \text{二次以上の微少量を無視すると} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \\
&\simeq \frac{1}{4\pi}\frac{2\mu_0 I \pi a^2}{z^3}
\end{aligned} \tag{28}$$

となる。ここで、

$$m = \mu_0 I S \tag{29}$$

とすると、円電流と磁気双極子がつくる遠方の磁場は同一となる。ただし、S はコイルの面積 (πa^2) である。

z 軸上の遠方では、円電流と磁気双極子のつくる磁場は同一となることが分かった。証明はしないが、z 軸に限らずいかなる方向でも同じ磁場分布となる。このようなことから、実際の磁場は、磁荷が作るのではなく円電流が作ると考えることができる。原子の中の電子が回転することによる円電流が小さな磁場をつくるのである。原子が大量にあり、同じ方向に磁場を作れば、それらは重ね合わせられ、強力な磁場を発生する。これが磁石となる。

4.2 磁荷に作用する力

この辺りは教科書を使って説明する。

5　課題

[**問題 1**]　教科書　p.85 の練習問題 (1), (2), (3), (4), (5)

5.1　レポート提出要領

提出方法は、次の通りとする。

期限	8 月 26 日 (木)PM1:00 まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト、または講義開始時に手渡し
表紙	表紙を 1 枚つけて、以下の項目を分かりやすく記述すること。 　授業科目名「電磁気学特論」 　課題名「課題　電流に働く磁場の力」 　生産システム工学専攻　学籍番号　氏名 　提出日
内容	問題の解答。計算課程をきちんと書くこと。