静磁場(ビオ-サバールの法則)

山本昌志[*]

2005年7月8日

1　本日の授業内容

本日は前回に引き続き、静磁場の話である。主な内容は、以下の通り。

- ビオ-サバールの法則
- ビオ-サバールの法則の導出
- 円電流の作る静磁場

2　ビオ-サバールの法則

2.1　ビオ-サバールの法則

静電場の場合、微少体積 ΔV が作る微少電場は、

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\Delta V}{r^2} \tag{1}$$

となった。これに対応する静磁場の式がビオ-サバールの法則である。電流 I が流れている微少区間 Δs が作る微少磁場 (磁束密度) は、

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta s\sin\theta}{r^2} \tag{2}$$

となる。図1にこれらの位置関係を示す。この微小磁場 ΔB は、ベクトルで、その大きさと方向は、

- 大きさは、式 (2) の示すとおりである。
- 観測点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と微少電流ベクトル $I\Delta\boldsymbol{s}$ の両方に垂直な方向を向いている。

となっている。

[*]国立秋田工業高等専門学校　生産システム工学専攻

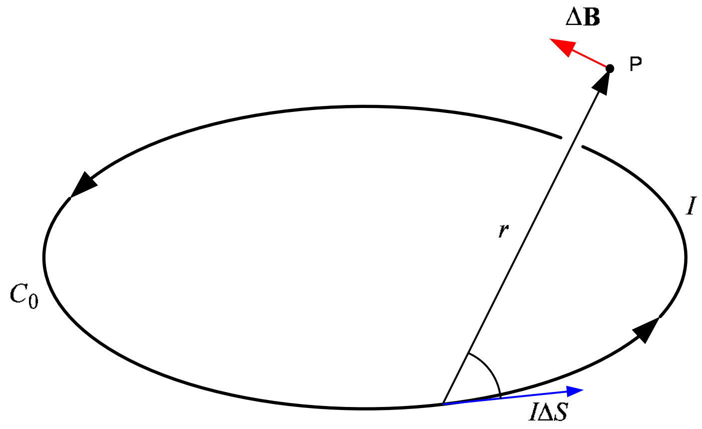

図 1: ビオ-サバールの法則

ちょっとこれらの式は方向を指定することが不可能なので、それを含めた正確なベクトルで表現する。ベクトルを用いて表現すると、図など書かなくても式が全てを語っている。それぞれは、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}V\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{3}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4}$$

となる。ただし、微少電流や微少電荷を座標原点に置いている。この後者をビオ-サバールの法則と言う。

後者の式は、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{d}V\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{5}$$

と書いた方が電場の式との対応が良い。こうなると、j は電流密度である。

2.2 ビオ-サバールの法則の導出

このビオ-サバールの法則は、特殊相対性理論を用いて導くのが本来の姿と思われるが、そこまですると、講義の時間が不足する。そこで、静磁場の知識のみですむ教科書と同じ説明をする。正直に言うと、このような説明方法があるとは知らなかった。さすが、砂川重信先生である。

今まで学習してきた磁場は、全て端が無い電流により作られる。すなわち、無限に長い電線や閉じた電線である。ビオサバールの法則を見ると、微少区間の電流を取り扱っているので、端が存在する。そのような電流を考えると、積分型のアンペールの法則が成り立たなくなる。これは、電流が保存されていないからである。

電流が保存された系で微少電流を考えるために、教科書では、微少電線の両端で発散と収束を考えている。このようにする限り、電流は保存され、積分型のアンペールの法則が成立する。また、これらの微少電流を足しあわせることにより、無限に長い電流や閉じた電流を考えることができる。この辺の所は教科書の図の通り。

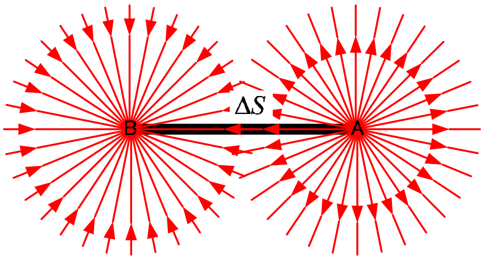

図 2: 電流保存則が成り立つ電流素

それでは、このような微少電流からビオ-サバールの法則が成立するか、調べることにする。教科書の図 5.9(a) に示している磁場 $\Delta\boldsymbol{B}$ を求める。そのために、積分形のアンペールの法則

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\ell = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{6}$$

を使う。ある閉じた面の縁の磁場の線積分は、内部の電流密度の面積分に等しい。もっと簡単に言うと、磁場を線積分したら、そこの面を流れる電流に等しいと言っているのである。これを利用して磁場を求めようと言うのである。ビオ-サバールの法則を考えるために、積分を行う範囲は、教科書の通り、円の一部を切り取った範囲が適当である。この部分では、電流は一定である。なぜならば、微少電線の端では、球状に電流が発散及び収束しており、この部分球の表面はその端から等距離にある。従って、ここでの電流密度は、

$$j = \frac{I}{4\pi r^2} \tag{7}$$

となる。また、対称性から、磁場の大きさも一定 ΔB となることは明らかである。

アンペールの法則、式 (6) を用いて磁場 ΔB を計算することになるが、この左辺は簡単で

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\ell &= \Delta B 2\pi R \\ &= 2\pi r\sin\theta\Delta B \end{aligned}\tag{8}$$

となる。

次に、式 (6) の右辺を考えることにする。この右辺は、積分領域の電流のを表している。ここでの、積分を行う部分の電流密度は一定で、$j=\frac{I}{4\pi r^2}$ と分かっている。したがって、積分領域の面積さえ分かれば、電流は計算でき、右辺の値が分かることになる。教科書の図 5.9(b) の帯状の微少区間の面積は、

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= r\mathrm{d}\theta' \times 2\pi r\sin\theta' \\ &= 2\pi r^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta' \end{aligned}\tag{9}$$

となる。従って全ての面積は、区間 $[0,\theta]$ で積分を行うことにより

$$\begin{aligned}S &= \int_0^\theta 2\pi r^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta' \\ &= 2\pi r^2\int_0^\theta \sin\theta'\mathrm{d}\theta' \\ &= 2\pi r^2(1-\cos\theta) \end{aligned}\tag{10}$$

と求められる。従って、微少電線の A から流出する電流の総量は、この面積に電流密度をかければ求められ、

$$
\begin{aligned}
j_A S_A &= 2\pi r^2(1-\cos\theta)\frac{I}{4\pi r^2} \\
&= \frac{I}{2}(1-\cos\theta)
\end{aligned} \tag{11}
$$

となる。これは、距離に関係なく、角度のみに依存する。電流は保存され、球状に放出されるので当たり前のことである。

次に、同じ縁を持つ積分領域で教科書の図 5.9 の B 点から吸収される電流を計算する。先の A 点の放出電流の式が使える。異なるところは、角度のみである。したがって、B 点への吸収電流はとなる。

$$
j_B S_B = \frac{I}{2}\left\{1-\cos(\theta-\Delta\theta)\right\} \tag{12}
$$

A 点の放出電流と、B 点の吸収電流をあわせたものがトータルの電流で、

$$
\begin{aligned}
j_A S_A - j_B S_B &= \frac{I}{2}(1-\cos\theta) - \frac{I}{2}\left\{1-\cos(\theta-\Delta\theta)\right\} \\
&= \frac{I}{2}\left\{\cos(\theta-\Delta\theta)-\cos\theta\right\} \\
&\qquad \Delta\theta \text{ は小さいので、テイラー展開して 1 次の項まで取る} \\
&\simeq \frac{I}{2}\left\{\cos\theta+\sin\theta\cdot\Delta\theta-\cos\theta\right\} \\
&\simeq \frac{I}{2}\sin\theta\cdot\Delta\theta
\end{aligned} \tag{13}
$$

となる。したがって、円 C_0 上のアンペールの法則は

$$
2\pi r\sin\theta\Delta B = \frac{\mu_0 I}{2}\sin\theta\cdot\Delta\theta \tag{14}
$$

となる。したがって、微小磁場は

$$
\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\Delta\theta \tag{15}
$$

となる。ビオ-サバールの法則まで、後一歩である。そのためには、$\Delta\theta$ がじゃまなので、書き換えなくてはならない。今考えている微少電流とその周辺の幾何学的配置は、図 3 のようになる。正弦定理

$$
\frac{\Delta S}{\sin\Delta\theta} = \frac{r}{\sin(\theta-\Delta\theta)} \tag{16}
$$

から、

$$
\sin\Delta\theta = \frac{\sin(\theta-\Delta\theta)}{r}\Delta S \tag{17}
$$

が導かれる。$\Delta\theta$ と ΔS が微少量としてテイラー展開し、1 次の項まで取ると、

$$
\begin{aligned}
\Delta\theta &\simeq \frac{\sin\theta-\cos\theta\cdot\Delta\theta}{r}\Delta S \\
&\simeq \frac{\sin\theta}{r}\Delta S
\end{aligned} \tag{18}
$$

となる。
　式 (15) と (18) から、微小磁場は、

$$\begin{aligned}\Delta B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\frac{\sin\theta}{r}\Delta S \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{I\Delta s\sin\theta}{r^2}\end{aligned} \tag{19}$$

となる。これがビオ-サバールの法則である。微少電流が作る微小磁場を表している。

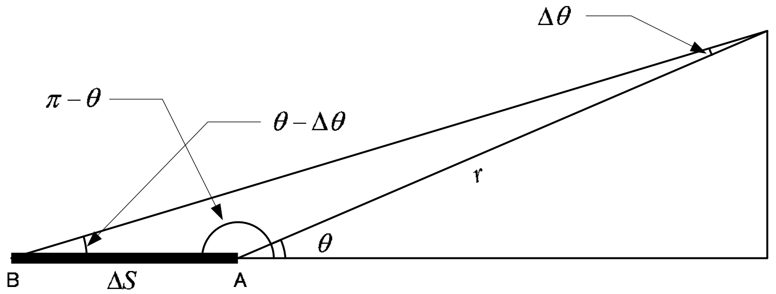

図 3: 微少電流とその位置関係

　もっと一般的な座標で書くと、

$$\delta \boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{j}(r') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\delta V \tag{20}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{r}$ は観測点、$\boldsymbol{r}'$ は微少電流の位置を表すベクトルである。この関係を図 4 に示す。

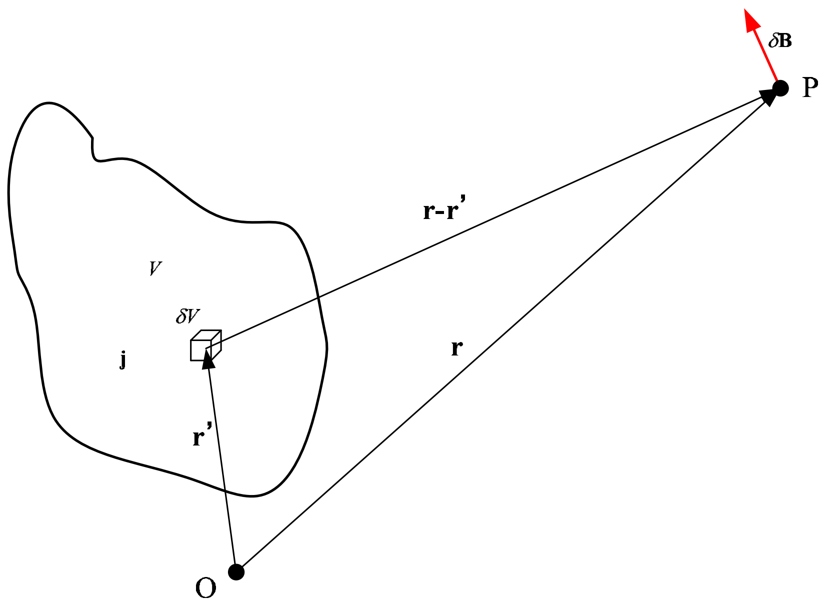

図 4: 微少電流とその位置関係

2.3　円電流が作る静磁場

問題のコイルの 1 個が軸上に作る磁場 B は、対称性により、軸上磁場は軸の方向に向いているはずである。その様子を図 5 の左の絵で示す。このコイルの小さい電流要素 δI が作る磁場は、ビオ- サバールの法則

$$\delta \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta \boldsymbol{I} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \tag{21}$$

から計算できる。これから、その磁場は図 5 の右の絵のようになる。軸上の磁場 $\boldsymbol{B}$ は、微小電流 $\delta\boldsymbol{I}$ がつくる微小磁場 $\delta\boldsymbol{B}$ をコイルの一周にわたって、足し合わせれば良い。

図から分かるように、微小磁場 $\delta\boldsymbol{B}$ は軸の垂直成分もある。しかし、これは、コイル 1 週にわたって足し合わせると、ゼロになる。コイル 1 周にわたって合計すると、残るのは軸上の成分のみである。コイルの軸上の成分は、

$$\begin{aligned}
\delta B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta \boldsymbol{I} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} \\
&\qquad \hat{\boldsymbol{z}}\text{ は、軸方向の単位ベクトル} \\
&\qquad \delta\boldsymbol{I}\text{ と }\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\text{ は直交しているので} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta I|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\cos\alpha \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta I}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}\cos\alpha \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\delta I}{z^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{a\delta I}{(z^2+a^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{22}$$

となる。これをコイルの全ての電流で積分することになるが、$\delta I = a\delta\theta$ を利用すると計算が楽である。磁場は

$$\begin{aligned}
B_z &= \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{a^2 I d\theta}{(z^2+a^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2 I}{(z^2+a^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{23}$$

となる。

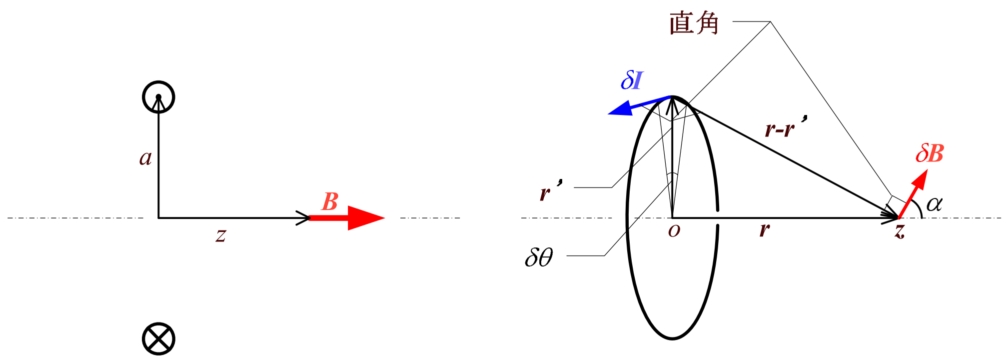

図 5: コイルが作る磁場

3　課題

[**問題 1**] 教科書　p.71 の練習問題

演習問題 (5) の計算は、結構大変である。本日示した円形電流が作る静磁場を利用して計算すること。

3.1　レポート提出要領

提出方法は、次の通りとする。

期限	7 月 15 日 (木)PM1:00 まで
用紙	A4
提出場所	山本研究室の入口のポスト、または講義開始時に手渡し
表紙	表紙を 1 枚つけて、以下の項目を分かりやすく記述すること。 授業科目名「電磁気学特論」 課題名「課題　静磁場」 生産システム工学専攻　学籍番号　氏名 提出日
内容	問題の解答。計算課程をきちんと書くこと。