

電気工学実験報告書

実験番号 E-3

実験題目 共振回路の特性測定

実験者学籍番号 98 - 76

3 学年 1 班 山本昌志

共同実験者氏名

広末涼子

長澤まさみ

雷電為右衛門

カメハメ八忠太郎

実験日 平成 16 年 9 月 28 日 水曜日

天候 晴れ 湿度 65.4 %

温度 23.7 °C 気圧 1013.5 hPa

提出日 平成 16 年 10 月 4 日 月曜日

検 印

1 目的

LCR 直列共振回路の共振現象を理解するとともに，抵抗分 R の増加が回路の Q 値に与える影響について調べる．

2 原理

2.1 共振回路

図 1 のような LCR 直列共振回路に交流電圧 E を加えたとき，回路に流れる電流の大きさ $|I|$ は

$$|I| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (1)$$

となる．ここで，交流電源の角振動数 ω を

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

とすると回路に最大の電流が流れるようになる． $\omega_0 = 2\pi f_0$ なので，周波数に直すと， $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ である．この場合，回路に流れる電流は，

$$I_0 = \frac{E}{R} \quad (3)$$

となる．最大の電流が流れるこの状態を共振と言う．丁度，電源の周波数と回路の固有振動数が一致している状態となっている．図 1 のような回路を直列では直列共振という．そして，電源の電圧を一定にしてその周波数を変化させると，図 2 のように回路に流れる電流が変化する．このような図を共振曲線という．

図から明らかなように， R の小さい回路では共振時の電流 I_0 は非常に大きくなるが，共振周波数からずれると，それは急激に減少する．この共振曲線の形状の鋭さを測る物差しとして Q を定義し，これを共振の鋭さ (sharpness of resonance) と言う．

$|I|$ が I_0 の $1/\sqrt{2}$ になる周波数を $f_1 = \omega_1/2\pi$ ， $f_2 = \omega_2/2\pi$ として，

$$\begin{aligned} Q &= \frac{f_0}{f_2 - f_1} \\ &= \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (\omega_1 \leq \omega_0 \leq \omega_2) \end{aligned} \quad (4)$$

と定義する．式 (1) から， $I_0/\sqrt{2}$ となる角振動数差を計算すると，

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad (5)$$

となり，Q 値は

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (6)$$

と求められる．

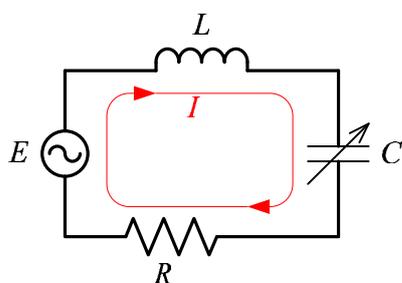


図 1: 直列共振回路

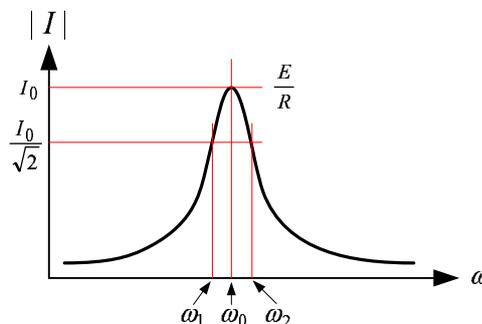


図 2: 共振曲線

2.2 Q 値の測定方法

ここでは，周波数を一定にして，コンデンサーの容量を変化させた場合の電流を測定して，Q 値を求める．図 1 の回路では，

$$|I|^2 = \frac{E^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (7)$$

となる．ところで，共振時にはこの式の分母の括弧の中がゼロとなるので，

$$I_0^2 = \frac{E^2}{R^2} \quad (8)$$

である．これより，

$$\sqrt{\frac{I_0^2 - |I|^2}{|I|^2}} = \frac{1}{\omega R C_0} \frac{\Delta C}{C} \quad (9)$$

となる．ここで， C_0 は共振時のコンデンサーの容量で， ΔC はその差である．さらに， $\omega^2 L C_0 = 1$ ， $1/(\omega R C_0) = \omega L/R = Q$ なので，

$$Q = \sqrt{\frac{I_0^2 - |I|^2}{|I|^2}} \frac{C}{\Delta C} \quad (10)$$

となる．ここで， $|I|$ を図 3 のように選ぶと，根号の中が 1 になる．したがって，

$$Q \simeq \frac{C_0}{\Delta C} \quad (11)$$

となる．コンデンサーの容量を変化させて，図 3 を描くことにより，式 (11) を用いて Q 値を求めることができる．

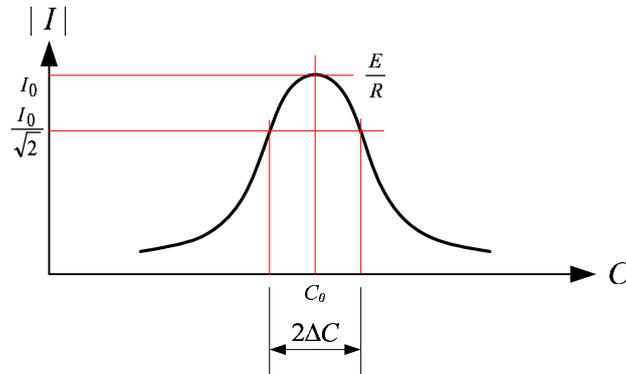


図 3: コンデンサーの容量と電流の関係

3 実験方法

直列共振回路の Q 値の測定は，原理で述べた Q 値の測定方法に示した方法を使った．すなわち，コンデンサーの容量を変化させて，そこに流れる電流を測定した．実際に測定に用いた回路を図 4 に示す．電流は，この回路のコンデンサーの電圧 V_2 を測定することにより求めた．

本実験では，この回路の抵抗 R を $0, 20, 50[\Omega]$ と 3 つの場合について，測定した．実際の実験では，バリャブルコンデンサーの容量を変化させ，電源電圧 V_1 とコンデンサーの両端の電圧 V_2 の変化を調べた．

電源電圧を一定にして測定することは難しい．そこで，二次側の電圧を一次側で規格化することにより，回路に流れる電流は，

$$|I| = 2\pi f(C_c + C_v) \frac{V_2}{V_1} \quad (12)$$

とした．直列共振回路の全容量 $(C_c + C_v)$ と電流 $|I|$ の関係を観測し，図 3 のようにプロットし，式 (11) に従い Q 値を求めた．

なお，この実験で用いた機材は，表 1 の通りである．

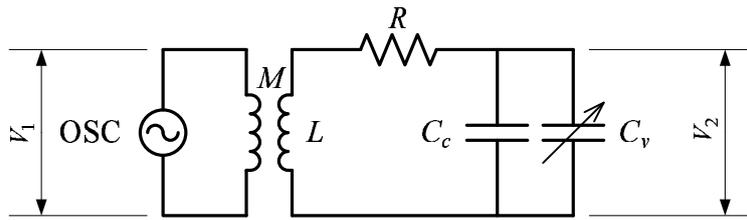


図 4: 実験の回路図

表 1: 共振回路の実験に使う機器

装置	メーカー	型番	台数
共振回路実験回路			1
オシロスコープ	KENWOOD	CS-5270	1
デジタルマルチメーター	YEW	Type 2807	2
ファンクションジェネレーター	KENWOOD	FG-273	1
バリアブルキャパシター	YEW	CDS-500	1

4 実験結果

実験方法に示したとおり，コンデンサーの静電容量を変化させて，コンデンサー両端の電圧 V_2 の測定を行った．直列共振回路の抵抗は，0, 20, 50[Ω] と変化させて，それぞれの共振特性を調べた．測定で得られたデータは，p.9 以降の付録にまとめてある．また，図 5 は，それをグラフにしたものである．

測定点をフィットしたこのグラフから得られた， Q 値を求めるために必要な値， C_0 と ΔC を表 2 にまとめる．なお，これらの値は，図 5 のグラフを拡大して求めた．さらに，式 (11) を用いて得られた Q 値も，表に載せている．それに示したとおり，この実験では， $R = 0[\Omega]$ のとき $Q = 66$ ， $R = 20[\Omega]$ のとき $Q = 19$ ， $R = 50[\Omega]$ のとき $Q = 9.6$ が得られた．

表 2: 実験結果

抵抗 [Ω]	共振周波数 [kHz]	C_0 [pF]	ΔC [pF]	Q 値
0	254.3	865	13	66
20	255.7	868	45	19
50	254.7	870	90	9.6

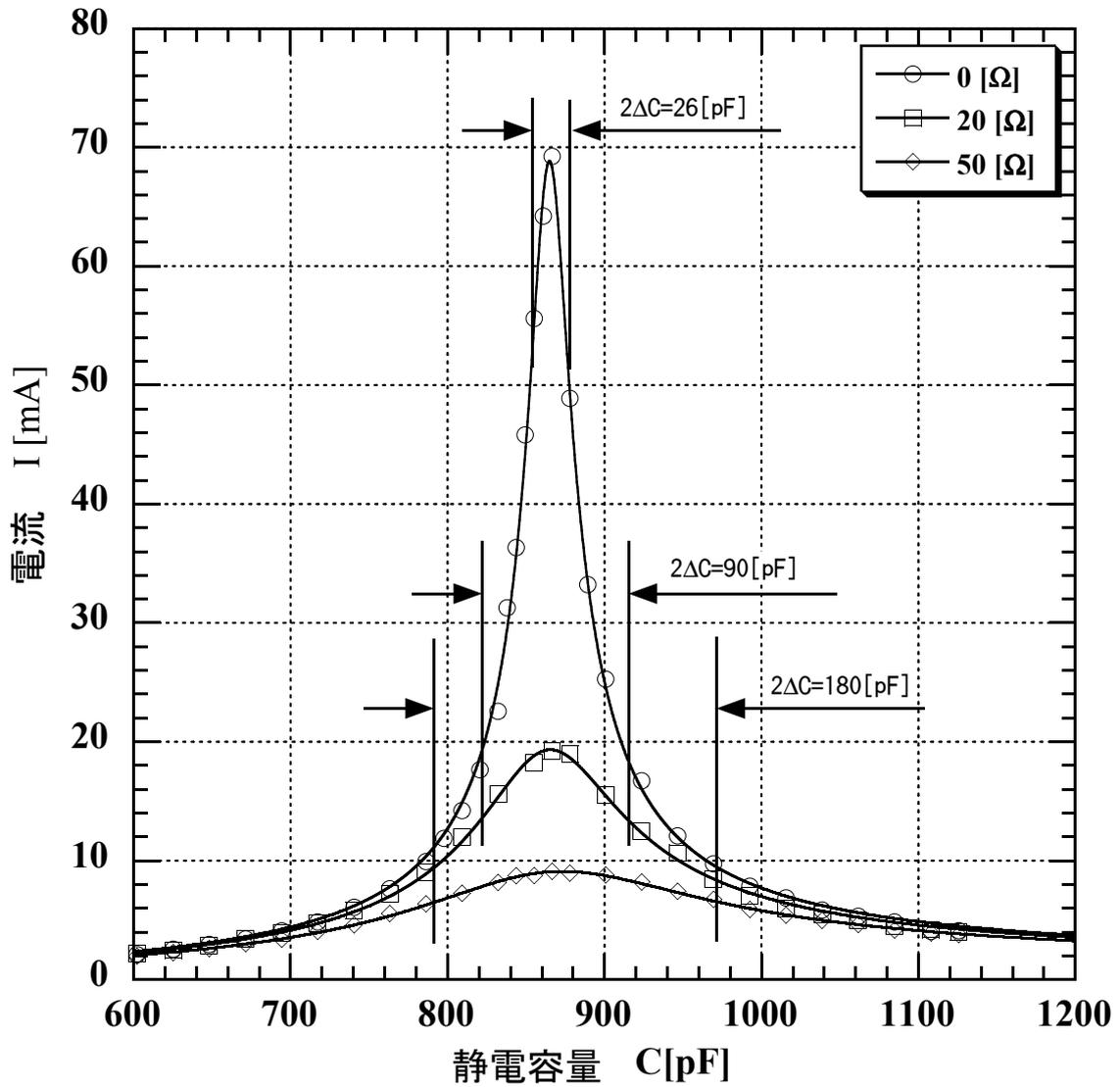


図 5: コンデンサーの容量と電流の関係．縦軸の電流は 1 次側の電圧 $V_1=1$ [V] の場合，共振回路に流れた電流である．横軸は回路の静電容量である．また，図中には $I_0/\sqrt{2}$ になる静電容量の幅も示している．

5 考察

直列共振回路の抵抗を $0, 20, 50[\Omega]$ と変化させた場合の Q 値を測定により求めた．これを理論値と比較してみる．理論値は，式 (6) を用いて，

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 L}{R} \\ \omega_0 &= 1/\sqrt{LC} \text{ なので} \\ &= \frac{1}{\omega_0 CR} \end{aligned} \quad (13)$$

と求められる．理論 Q 値はこの式の右辺を計算することにより求められ，その結果を実験値と合わせて，表 3 に載せる．

表 3: Q 値の理論値と実験値

抵抗 $[\Omega]$	測定 Q 値	理論 Q 値
0	66	∞
20	19	35
50	9.6	14

表を見て分かる通り，理論値と実験値に大きな差がある．そして，必ず測定結果の Q 値が理論値より低くなっている．これはコイルの抵抗が原因となっていると考える．静電容量の誤差もこれほど生じないだろうし，配線材の抵抗も大きいとは思えないからである．それに対して，コイルは，ポピンに巻かれた長い細線から作られているので，無視できない抵抗があると推測できる．もし，コイルの抵抗を r とすると，式 (13) は

$$Q = \frac{1}{\omega_0(r+R)CR} \quad (14)$$

となる．これから，コイルの抵抗は，

$$r = \frac{1}{\omega_0 C Q} - R \quad (15)$$

と求められる．表 2 の実験結果と表 3 の示した測定によって求められた Q 値を，この式に当てはめると，表 4 に示すようなコイルの抵抗が推定できる．3 つの実験では同じコイルを使ったので，その抵抗は同一になるが，2 倍ほど異なっている．これは， Q 値の測定精度に起因している可能性が高い．

コイルの抵抗をこの 3 つの平均値 $r = 17[\Omega]$ と考えると， Q 値の理論値は， $R = 0[\Omega]$ のとき $Q = 42, R = 20[\Omega]$ のとき $Q = 19, R = 50[\Omega]$ のとき $Q = 10$ と測定値にかなり近づく．あくまで，このコイルの抵抗は推定値なので，実際に測定して確かめなくてはならない．

表 4: 測定結果から推定されるコイルの抵抗

実験に使った抵抗の抵抗値 [Ω]	推定されるコイルの抵抗値 [Ω]
0	11
20	17
50	24

6 考察課題

[問 1] 共振曲線の鋭さは回路の何に起因しているか? .

Q 値の定義から, それは, 共振の鋭さを示すパラメーターである. Q 値が大きいほど共振は鋭くなる. 一方, Q 値は直列共振回路のパラメーターを使って,

$$Q = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\omega L}{R} \quad (16)$$

と表すことができる. この式から, Q 値は,

- コンデンサーのインピーダンス ($1/\omega_0 C$) と抵抗のインピーダンス (R) の比
 - コイルのインピーダンス ($\omega_0 L$) と抵抗のインピーダンス (R) の比
- となる. いずれにしても, コイルの抵抗が小さければ, Q 値は大きくなり, 共振は鋭くなる. したがって, 共振の鋭さは, 回路の抵抗によって決まる.

[問 2] Q 値には, 共振曲線の鋭さ以外の定義がある. 回路で単位時間当たり消費されるエネルギー P とそこに蓄えられるエネルギー U と関係して定義される. エネルギーから定義される Q 値を示せ. 実際の問題では, 共振の鋭さから Q 値を求めるよりも, このエネルギーから計算する方が易しい.

Q 値とエネルギーの関係を求めるために, Q 値の式 (6) の分母分子に, 回路の電流 I の 2 乗を乗じる. すると,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega LI^2}{RI^2} \\ &= \omega \frac{\frac{1}{2} LI^2}{\frac{1}{2} RI^2} \end{aligned} \quad (17)$$

となる．この式の分母は回路に蓄えられるエネルギー U に，分子は回路が単位時間に消費するエネルギー P に等しい．また，周期 T をつかうと， $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ なので，

$$Q = 2\pi \frac{U}{PT} \quad (18)$$

と書き換えられる．これが，問2の答えである．

この分母は，1周期に失うエネルギーである．したがって， Q 値は，回路に蓄えられるエネルギーと1周期で失うエネルギーの比の 2π 倍となっている．

この辺のことについて調べると，参考文献 [1] に金属に囲まれた空間が共振回路になると書かれており興味深い．

7 感想

共振回路の抵抗が小さい場合，共振時に多くの電流が流れることが分かった．さらに，抵抗が小さいと共振の範囲が狭いことも理解できた．これを上手に使うと，なにかおもしろい回路が出来そうである．

実験値と理論値の違いが2倍程度あった．この誤差をコイルの抵抗と推測したが，実際に確かめられなかったのが残念である．来年度からの実験では，この抵抗値の測定も実施することを提案する．もしくは，実験中に測定結果をまとめさせて，その原因を考えさせるのも良い学習と思う．

8 付録

実験で得られたデータを表5~7にまとめておく.

表 5: 測定結果 ($R=0$ [Ω])

$f=254.3$ [KHz], $R=0$ [Ω]

コンデンサー C_v 目盛り	コンデンサー C_v [pF]	回路全体 C [pF]	電圧 V_1 [V]	電圧 V_2 [V]	回路の電流 $ I $ [mA/V]
0.0	29.10	579.10	0.30	0.62	1.91
2.0	32.00	582.00	0.30	0.63	1.95
4.0	52.10	602.10	0.30	0.66	2.12
6.0	75.20	625.20	0.30	0.77	2.56
8.0	98.20	648.20	0.30	0.86	2.97
10.0	121.30	671.30	0.31	0.99	3.43
12.0	144.30	694.30	0.31	1.15	4.12
14.0	167.30	717.30	0.32	1.36	4.87
16.0	190.40	740.40	0.32	1.65	6.10
18.0	213.20	763.20	0.33	2.07	7.65
20.0	236.20	786.20	0.34	2.69	9.94
21.0	247.80	797.80	0.34	3.17	11.89
22.0	259.20	809.20	0.34	3.74	14.22
23.0	270.60	820.60	0.34	4.58	17.66
24.0	282.20	832.20	0.33	5.60	22.56
24.5	287.95	837.95	0.28	6.54	31.27
25.0	293.70	843.70	0.25	6.74	36.34
25.5	299.45	849.45	0.20	6.75	45.81
26.0	305.20	855.20	0.16	6.51	55.60
26.5	310.90	860.90	0.13	6.07	64.23
27.0	316.60	866.60	0.11	5.50	69.23
28.0	328.00	878.00	0.13	4.53	48.88
29.0	339.40	889.40	0.16	3.74	33.22
30.0	350.80	900.80	0.18	3.16	25.27
32.0	373.70	923.70	0.21	2.38	16.73
34.0	396.60	946.60	0.23	1.84	12.10
36.0	419.50	969.50	0.24	1.51	9.75
38.0	442.60	992.60	0.25	1.24	7.87
40.0	465.60	1015.6	0.25	1.06	6.88
42.0	488.70	1038.7	0.26	0.92	5.87
44.0	511.70	1061.7	0.26	0.82	5.35
46.0	534.80	1084.8	0.26	0.73	4.87
48.0	558.10	1108.1	0.27	0.62	4.07
50.0	575.70	1125.7	0.27	0.62	4.13

表 6: 測定結果 ($R=20 \text{ }[\Omega]$)

$f = 255.7 \text{ [KHz]}$, $R = 20 \text{ }[\Omega]$

コンデンサー C_v 目盛り	コンデンサー C_v [pF]	回路全体 C [pF]	電圧 V_1 [V]	電圧 V_2 [V]	回路の電流 $ I $ [mA/V]
0.0	29.10	579.10	0.31	0.64	1.92
2.0	32.00	582.00	0.31	0.66	1.99
4.0	52.10	602.10	0.31	0.71	2.22
6.0	75.20	625.20	0.31	0.77	2.49
8.0	98.20	648.20	0.31	0.86	2.89
10.0	121.30	671.30	0.31	0.98	3.41
12.0	144.30	694.30	0.32	1.13	3.94
14.0	167.30	717.30	0.32	1.32	4.75
16.0	190.40	740.40	0.32	1.57	5.84
18.0	213.20	763.20	0.32	1.88	7.20
20.0	236.20	786.20	0.32	2.29	9.04
22.0	259.20	809.20	0.30	2.77	12.00
24.0	282.20	832.20	0.27	3.15	15.60
26.0	305.20	855.20	0.24	3.19	18.26
27.0	316.60	866.60	0.22	3.04	19.24
28.0	328.00	878.00	0.21	2.83	19.01
30.0	350.80	900.80	0.22	2.36	15.52
32.0	373.70	923.70	0.23	1.94	12.52
34.0	396.60	946.60	0.23	1.61	10.65
36.0	419.50	969.50	0.24	1.30	8.44
38.0	442.60	992.60	0.25	1.11	7.08
40.0	465.60	1015.6	0.26	0.96	6.02
42.0	488.70	1038.7	0.26	0.86	5.52
44.0	511.70	1061.7	0.26	0.76	4.99
46.0	534.80	1084.8	0.27	0.70	4.52
48.0	558.10	1108.1	0.27	0.64	4.22
50.0	575.70	1125.7	0.27	0.60	4.02

表 7: 測定結果 (R=50 [Ω])

$f = 254.7$ [KHz], $R = 50$ [Ω]

コンデンサー C_v 目盛り	コンデンサー C_v [pF]	回路全体 C [pF]	電圧 V_1 [V]	電圧 V_2 [V]	回路の電流 $ I $ [mA/V]
0.0	29.10	579.10	0.31	0.60	1.79
2.0	32.00	582.00	0.30	0.60	1.86
4.0	52.10	602.10	0.31	0.64	1.99
6.0	75.20	625.20	0.31	0.71	2.29
8.0	98.20	648.20	0.30	0.76	2.63
10.0	121.30	671.30	0.30	0.85	3.04
12.0	144.30	694.30	0.31	0.95	3.41
14.0	167.30	717.30	0.30	1.06	4.06
16.0	190.40	740.40	0.31	1.21	4.62
18.0	213.20	763.20	0.30	1.37	5.58
20.0	236.20	786.20	0.30	1.52	6.37
22.0	259.20	809.20	0.29	1.63	7.28
24.0	282.20	832.20	0.28	1.72	8.18
25.0	293.70	843.70	0.27	1.75	8.75
26.0	305.20	855.20	0.27	1.73	8.77
27.0	316.60	866.60	0.26	1.71	9.12
28.0	328.00	878.00	0.26	1.66	8.97
30.0	350.80	900.80	0.25	1.53	8.82
32.0	373.70	923.70	0.25	1.39	8.22
34.0	396.60	946.60	0.25	1.23	7.45
36.0	419.50	969.50	0.25	1.09	6.76
38.0	442.60	992.60	0.26	0.97	5.93
40.0	465.60	1015.6	0.26	0.87	5.44
42.0	488.70	1038.7	0.26	0.78	4.99
44.0	511.70	1061.7	0.26	0.71	4.64
46.0	534.80	1084.8	0.27	0.65	4.18
48.0	558.10	1108.1	0.27	0.60	3.94
50.0	575.70	1125.7	0.27	0.57	3.80

参考文献

- [1] ファインマン, レイトン, サンズ. 電磁波と物性, ファインマン物理学, 第 IV 巻. 岩波書店, 1983.