対数グラフの書き方

山本昌志[*]

2005 年 10 月 4 日

1　本日の授業内容

前期の実験で，対数グラフの作成に苦労していた学生が多い．そこで，対数グラフの使い方を説明する．

2　方眼紙について

諸君が使う方眼紙は，普通の方眼紙 (名前??), 型対数方眼紙，両対数方眼紙が主である．これらをデータに応じて使い分ける必要がある．まず，これらの方眼紙の特徴を述べる．

2.1　普通の方眼紙

これは，もっともおなじみの，x 軸と y 軸ともリニアーになっているものである．説明するまでもなく，よく知っているだろう．これはグラフ上の基準点からの距離 (X, Y) に，データ (x, y) を

$$X = C_{0x} + C_{1x}x \qquad\qquad Y = C_{0y} + C_{2y}y \tag{1}$$

のようにプロットする．C_{1x} と C_{1y} はグラフのスケールを決める定数，C_{0x} と C_{0y} はオフセットである．難しいことを言わなくても，x 軸と y 軸の交点 (基準点) を (C_{0x}, C_{0y}) として，等間隔に目盛りを付けていると言うだけのことである．

したがって，x 軸と y 軸ともリニアーになっている方眼紙では，$y = ax + b$ の一次関数が

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} &= \frac{C_{1y}}{C_{1x}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{C_{1y}}{C_{1x}}a \end{aligned} \tag{2}$$

のように，グラフ用紙で直線になる．なぜならば，x に依存しないで，傾きが一定となっているからである．このグラフの傾き $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$ と，スケールの比 C_2/C_1 から，データの 1 次関数の係数 a が分かるのである．

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

2.2 片対数方眼紙

この方眼紙の軸は，ちょっと変わっていて，片方はリニアーで，もう一方は対数軸がである．横軸，縦軸とも対数軸にすることができるが，ここでは話を簡単にするために，縦軸を対数軸とする．そうすると，横軸はリニアー軸になる．先ほどと同様にグラフ上の基準点からの距離を (X, Y) とする．この場合は，

$$X = C_{0x} + C_{1x}x \qquad\qquad Y = C_{1y}\log_{10}\left(\frac{y}{y_0}\right) \tag{3}$$

となる．C_{1x} と C_{1y} はグラフのスケールを決める定数である．C_{1y} は 1 にするのが普通である．以降，$C_{1y} = 1$ として話を進める．C_{0x} は，x 軸のオフセットである．y_0 は基準点 $(Y = 0)$ での，y の値である．もう一度ちゃんと書くと，データは，

$$X = C_{0x} + C_{1x}x \qquad\qquad Y = \log_{10}\left(\frac{y}{y_0}\right) \tag{4}$$

と片対数方眼紙でプロットされる．

このグラフでは，指数関数

$$y = ab^{cx} \tag{5}$$

が直線になる．これは，

$$y = ae^{xc\log_e b} = a10^{xc\log_{10} b} \tag{6}$$

から，底が e や 10 でもおなじことである．一般に，片対数方眼紙は，指数が 10 の時，便利に使えるように考慮されている．と思っていたら，今回，捜してきた片対数グラフはそうなっていない．非常に驚いたが，近頃はそういうのもあるらしい．ここでは，昔から使われてきた，横軸の 10 目盛り (10cm) の寸法と縦軸の 1 桁が 10cm と等しいものを対象にする．

そこで，

$$y = \alpha 10^{\beta x} \tag{7}$$

がどのように表されるか，考える．式 (4) より，

$$\mathrm{d}X = C_{1x}\mathrm{d}x \tag{8}$$

となる．一方，$\mathrm{d}Y$ は，式 (7) を式 (4) に代入して計算すればよく，

$$\mathrm{d}Y = \beta\mathrm{d}x \tag{9}$$

となる．したがって，グラフ上の傾きは，

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\beta}{C_{1x}} \tag{10}$$

となる．これから，片対数方眼紙では，指数関数が直線で表せることが分かった．そして，その傾きは，β/C_{1x} を表し，β が容易に求まることが分かった．

2.3　両対数方眼紙

このグラフは，片対数方眼紙と同じように考えることができ，データ (x,y) は，グラフ上の (X,Y)

$$X = C_x \log_{10}\left(\frac{x}{x_0}\right) \qquad Y = C_y \log_{10}\left(\frac{y}{y_0}\right) \tag{11}$$

に変換される．

この方眼紙は，

$$y^\alpha = Cx^\beta \tag{12}$$

が直線になる．このことを，今までと同じように確認してみよう．まずは，式 (11) から，

$$\mathrm{d}X = \frac{C_x \mathrm{d}x}{x \log_e 10} \tag{13}$$

となる．次に，$\mathrm{d}Y$ であるが，

$$y = C^{1/\alpha} x^{\beta/\alpha} \tag{14}$$

と変形しておく．これを，式 (11) に代入して，整理すると，

$$\mathrm{d}Y = \frac{\beta}{\alpha} C_y \frac{\mathrm{d}x}{x \log_e 10} \tag{15}$$

となる．したがって，グラフ上の傾きは，

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{C_y}{C_x} \tag{16}$$

となり，いつも一定で直線になる．

通常，両対数方眼紙は，$C_y/C_x = 1$ になるように作られるので，グラフの傾きは β/α をあらわす．

3　いろいろなデータ

3.1　細菌の増加

細菌が 1.5 時間で倍に増加するとする．最初,1 匹の細菌が，時間とともに増加することを 2 つのグラフで確かめる．

[練習 1] 普通の方眼紙に，横軸を時間，縦軸に細菌の数をプロットせよ．何がわかるか?.

[練習 2] 同様に，片対数グラフにプロットせよ．15 時間後の細菌の数はどうなっているだろうか?

細菌の数を見れば，指数関数的に増加することの恐ろしさが分かるだろう．身近な例として，サラ金のローンも指数関数になっている．短い時間は，一次関数となっていて気がつかないが，長い時間借りると，恐ろしいことになる．年利 20%のでサラ金からお金を借りた場合の返済額をプロットしてみるとよく分かる．

3.2 ケプラーの法則

この辺の話は，数学セミナー 2004 年 4 月号の対数方眼紙で遊ぼう [1] をかなり参考にさせてもらっています.

惑星の公転周期と半径の関係を表したのが，ケプラーの第三法則である．これらの関係の測定結果を表 1 に示す.

[**練習 1**] 普通の方眼紙に，横軸を公転周期，縦軸を公転半径をプロットせよ．何が分かるか?．それとも何も分からないか?.

[**練習 2**] 同様に，両対数グラフにプロットせよ．グラフの結果から，何が言えるか?.

表 1: 太陽の惑星と公転半径と周期 [1]

惑星	公転半径 R(地球=1)	公転周期 T(地球=1)
水星	0.39	0.24
金星	0.72	0.62
地球	1.00	1.00
火星	1.52	1.88
木星	5.20	11.9
土星	9.55	29.5
天王星	19.2	84.0
海王星	30.1	164.8
冥王星	39.5	247.8

4 方眼紙の使い分け

では，実際の測定データをグラフにする場合，どのような基準で方眼紙を選んだらよいのだろうか?．データの関数形が分かっているならば，データが直線に並ぶ方眼紙を選んでプロットするのが良いだろう.

しかし，データの関数形が分からない場合が実際には多い．その場合は，大体，次の基準でグラフ用紙を選んだらよいだろう.

- データの間隔がほぼ等間隔の場合は，リニアーの軸を使う．測定データの単位が [dB] の場合は，リニアーの軸をつかう．これは，すでに対数計算が施されているからである.
- データの間隔が大きく異なれば，対数軸を使う．あるいは，データのレンジが広く，大きなデータから小さいデータまで示したい場合にも，対数軸を使う.

私はこのような観点から，グラフの軸を選んでいる．そして，実際に書いてみて，見やすければ OK としている．パソコンを使って，グラフを書いているので，軸の変更が簡単なので，いろいろ書いてみてデータばまんべんなく分布するように軸を選んでいるのである.

データに負の数がある場合は，どうするか?．どうしても対数グラフに角必要がある場合は，絶対値を取るなどして，データの加工を行っている．これは，場合に応じて分かりやすいようにデータを加工すれば良い．諸君がいっぱいグラフを書いて，経験を積めば，データの加工方法も分かるだろう．

いずれにしても，グラフを書く目的は，データを一目で理解させることにある．したがって，グラフの良し悪しは，分かりやすいか否かにかかっている．諸君は，分かりやすいグラフを書くことに心がけなくてはならない．

参考文献

[1] 細谷治夫. 対数方眼紙で遊ぼう. 数学セミナー, pp. 46–55. 日本評論社, 4 月号 2004 年.