学年末試験問題 (5E 計算機応用)

電気工学科　　学籍番号　　　　　　氏名

1　連立 1 次方程式 (反復法)

[問 1] $\boxed{\textit{15 点}}$

反復法とは、連立方程式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

の解 $\boldsymbol{x}$ を、求める方法の一つである。ここで、真の解を $\boldsymbol{x}$ とする。ある計算により n 回目で求められた近似解を $\boldsymbol{x}_n$ とする。そして、計算回数を増やして、

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$$

になったとする。この様に計算回数を増やして、真の解に近づける方法を反復法という。

[問 2] $\boxed{\textit{10 点}}$

連立方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の係数行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{S} - \boldsymbol{T}$ と分解する。すると、

$$\boldsymbol{Sx}_{k+1} = \boldsymbol{Tx}_k + \boldsymbol{b}$$

のような反復計算の漸化式が作られる。行列 $\boldsymbol{A}$ の対角成分を反復計算の行列 $\boldsymbol{S}$ としたものがヤコビ (Jacobi) 法である。ヤコビ法では、係数行列を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

と分解する。右辺第 1 項が行列 $\boldsymbol{S}$ で第 2 項が $-\boldsymbol{T}$ となる。$\boldsymbol{x}_{k+1}$ の解の計算に必要な $\boldsymbol{S}$ の逆行列は、それが対角行列なので、

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{22}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{33}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

と簡単である。k+1 番目の近似解は、$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Tx}_k)$ なので容易に求めることができる。

2　補間法

［問 1］ $\boxed{\textit{5 点}}$

データ数が $N+1$ 個ある場合、N 次関数で補間する方法をラグランジュ補完と言う。この補間の場合、全てのデータ点を通る。

［問 2］ $\boxed{\textit{10 点}}$

2 次元座標上に 4 個の点、(x_0, y_0) , (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) のラグランジュ補間は、

$$
\begin{aligned}
y = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3
\end{aligned}
$$

となる。

［問 3］ $\boxed{\textit{10 点}}$

問 2 の式を見ると、

- 全ての分母は定数で、分子は 3 次関数である。したがって、この式は 3 次関数である。
- x に x_0, x_1, x_2, y_4 を代入すると、y の値は y_0, y_1, y_1, x_4 になることが分かる。これは、データ点 (x_0, y_0) , (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4) の全てを通過していることを示している。

となっている。従って、問 1 の特徴を満足している。

3　積分法

[問 1] $\boxed{25\text{点}}$

定積分、

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

の近似値を数値計算で求めることを考える。積分の計算は面積の計算であるから、図 1 のように台形の面積の和で近似ができるであろう。積分の範囲 $[a, b]$ を N 等分した台形で近似した面積 T は、

$$\begin{aligned} T &= h\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + h\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + h\frac{f(a+2h)+f(a+3h)}{2} + \cdots \\ &\qquad + h\frac{f(a+(N-1)h)+f(a+Nh)}{2} \\ &= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[f(a+jh)+f(a+(j+1)h)\right] \end{aligned}$$

となる。これが数値積分の台形公式である。

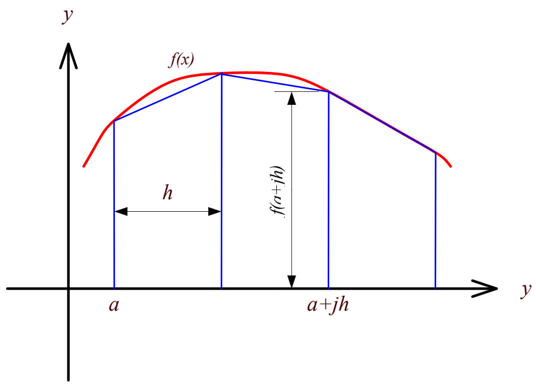

図 1: 積分と台形の面積の比較

4　偏微分方程式

［**問 1**］ $\boxed{25\text{点}}$

1 次元波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

である。ここで、u が変位など波の状態を表し、それは時間 t と位置 x の関数である。時刻と位置の関数としての u の振る舞いを求めたい。そのために、波動方程式を差分方程式に書き直す。まずは、解 $u(x,t)$ をテイラー展開する。x 方向の微小変位を Δx、時間軸方向の微小変位を Δt とすると、

$$u(x+\Delta x,t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4 + \cdots$$
$$u(x-\Delta x,t) = u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4 - \cdots$$

となる。これらの式の辺々を足し合わせえると、

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x,y} = \frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right] - O(\Delta x^2) \tag{1}$$

が得られる。このことから、2 階の偏導関数の値は微小変位 Δx の場所の関数の値を用いて、$(\Delta x)^2$ の精度で近似計算ができることが分かる。すなわち、式 (1) の右辺の第 1 項を計算すればよいのである。同様なことを時間軸方向についても行うと

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x,t} = \frac{1}{\Delta t^2}\left[u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)\right] - O(\Delta t^2) \tag{2}$$

が得られる。

これらの式 (1) と (2) を元の波動方程式に代入すれば、

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right] = \frac{1}{\Delta t^2}\left[u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)\right]$$

となる。これが、1 次元波動方程式の差分の式である。