後期中間試験問題 (5E 計算機応用)

山本昌志*

2004 年 12 月 06 日

1 常微分方程式の数値計算法

1.1 基礎

常微分方程式、

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

の近似解を数値計算により求める方法についての問いである。

[問 1] 式 1 の解を $y = y(x)$ とする。$y_i = y(x_i)$ として、x_i の周りでのテイラー展開を書け。

[問 2] オイラー法の漸化式を示せ。

[問 3] オイラー法の場合、テイラー展開のどの項を無視 (計算に考慮していない) しているか

[問 4] ホイン法の漸化式

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \tag{2}$$

を導け

[問 5] 4 次のルンゲ・クッタ法の漸化式を書け

[問 6] 数値計算を行う場合、高階の微分方程式は 1 階の連立微分方程式に直す。次の、微分方程式を 1 階の連立微分方程式に直せ。

$$5y'' + y' + y = \sin(\omega x) \tag{3}$$

1.2 プログラム

4 次のルンゲ・クッタ法で常微分方程式の近似解を計算するプログラムを示す。プログラム中の $\boxed{\quad ア \quad}$ と $\boxed{\quad イ \quad}$ に入れる適当な文を書け。

ただし、プログラムの条件は次の通りとする。

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

- 計算結果の x_i の値は配列 x[i] に格納される。そのときの y の値、即ち、y_i の値は、配列 y[i] に格納される。
- 計算に必要な値は、プログラムの前半で、
  - 初期値は、配列の x[0] と y[0] に格納される。
  - 計算を止める x の最終の値は、変数 final_x に格納される。
  - 計算回数は、変数 ncal に格納される。

  と与えられる。
- $\boxed{\quad ア \quad}$ は、4 次のルンゲ・クッタの計算を行い、近似解を配列 x[] と y[] に格納している。
- 解くべき微分方程式は、

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \cos x - y \cos x \tag{4}$$

  である。そして、この右辺の値は、関数 func で計算するものとする。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define IMAX 100001
double func(double x, double y);

/*==================================================================*/
/*       main function                                              */
/*==================================================================*/
int main(void){
  double x[IMAX], y[IMAX];
  double final_x, h;
  double k1, k2, k3, k4;
  int ncal, i;


  /*--- set initial condition and cal range ---*/

  x[0]=0.0;
  y[0]=0.0;

  final_x=10.0;
  ncal=10000;

  /* --- size of calculation step --- */

  h=(final_x-x[0])/ncal;


  /* --- 4th Runge Kutta Calculation --- */
```

```
    ア

  return 0;
}


/*==================================================================*/
/*       define function                                            */
/*==================================================================*/
double func(double x, double y){
  double dydx;

    イ

  return(dydx);
}
```

2 常微分方程式の数値計算法

2.1 連立一次方程式の解法

連立一次方程式について、以下の問いに答えよ。

[**問 1**] 次の、連立一次方程式を行列とベクトルで表現せよ。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \tag{5}$$

[**問 2**] 前問の方程式を、行列とベクトルの表示のままで、ガウス・ジョルダン法を用いて解け。計算過程は、全て書くこと。行列とベクトルを用いない表示には点を与えない。また、この方程式の解は $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ である。この解をよく考えながら、計算ミスに気を付けて解答を記述すること。

2.2 プログラム

ガウス・ジョルダン法で連立一次方程式の解を計算する関数 (サブルーチン) に関する問いである。プログラム中の$\boxed{}$ の部分の文を書け。

ただし、条件は以下の通りとする。

- 対角成分には、決して 0 が現れないものとする。即ち、ピボット選択は不要である。

- 行列式が 0 となる係数行列は、与えられないものとする。即ち、行列が特異な場合の処理は不要である。
- 仮引数 n は、解くべき連立方程式の未知数の数である。
- 仮引数の配列 a と b は、係数行列 $\boldsymbol{A}$ と非同次項 $\boldsymbol{b}$ である。
  - 係数行列は、配列 a[1][1]〜a[n][n] に格納されている。
  - 非同次項は、配列 b[1]〜b[n] に格納されている。
- プログラム実行後、連立方程式の解 $\boldsymbol{x}$ は、配列 b[1]〜b[n] に格納される。
- このプログラムでの処理が終了すると、配列 a[1][1]〜a[n][n] は単位行列になる。

```
/* ========== ガウスジョルダン法の関数 ==================*/
void gauss_jordan(int n, double a[][100], double b[]){

}
```