後期中間試験問題 (5E 計算機応用)

電気工学科　学籍番号　　　氏名

1 常微分方程式の数値計算法

1.1 基礎

[問 1] $\boxed{5\text{点}}$

$$f(x_i+\Delta x)=f(x_i)+f'(x_i)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_i)\Delta x^2+\frac{1}{3!}f'''(x_i)\Delta x^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(x_i)\Delta x^4+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_i)\Delta x^n$$

[問 2] $\boxed{5\text{点}}$

$$y_{i+1}=y_i+f(x_i,y_i)\Delta x$$

[問 3] $\boxed{5\text{点}}$

2 次 (Δx^2) 以降の項を無視している。

[問 4] $\boxed{10\text{点}}$

刻み幅を h とする。ホイン法は 2 次の精度なので、テイラー展開より

$$\Delta y=y'(x_0)h+\frac{1}{2}y''(x_0)h^2 \tag{1}$$

となるようなアルゴリズムにする。。

y の増分 Δy を計算するためには、1 階微分と 2 階微分の 2 項を満たす式が必要で、そのために、計算区間の両端の導関数の値を使う。この導関数は問題として与えられているので、計算は簡単である。そうして、区間の増分を α,β をパラメーターとした和で。

$$\Delta y=h\{\alpha y'(x_0)+\beta y'(x_0+h)\} \tag{2}$$

と表す。この式を x_0 の回りでテイラー展開し、3 次以降を無視すると

$$\Delta y=(\alpha+\beta)y'(x_0)h+\beta y''(x_0)h^2 \tag{3}$$

となる。これを、式 (1) と比較すると、$(\alpha,\beta)=(1/2,1/2)$ とすれば良いことが分かる。これから、

$$\begin{cases} k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1) \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{2}(k_1+k_2) \end{cases} \tag{4}$$

とすれば、2 次の精度が得られると考えられる (実は、完璧ではない)。これがホイン法である。

[問 5] 10 点

$$
\begin{cases}
\quad k_1 = hf(x_n, y_n) \\
\quad k_2 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}) \\
\quad k_3 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_2}{2}) \\
\quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
x_{n+1} = x_n + h \\
y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{cases}
$$

[問 6] 10 点 これを連立微分方程式に直すために、$y_0 = y, y_1 = y'$ とと変数変換する。すると、問題の 2 階の微分方程式は、

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\
5\dfrac{y_1}{dx} + y_1 + y_0 = \sin(\omega x)
\end{cases}
\tag{1}
$$

となる。これを、数値計算しやすいように直すと

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\
\dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{\sin(\omega x) - y_0 - y_1}{5}
\end{cases}
\tag{2}
$$

となる。これで、2 階の常微分方程式が、2 元の連立常微分方程式に直せた。

1.2 プログラム

ア 10 点

```
for(i=0; i < ncal; i++){
  k1=h*func(x[i],y[i]);
  k2=h*func(x[i]+h/2.0, y[i]+k1/2.0);
  k3=h*func(x[i]+h/2.0, y[i]+k2/2.0);
  k4=h*func(x[i]+h, y[i]+k3);

  x[i+1]=x[i]+h;
  y[i+1]=y[i]+1.0/6.0*(k1+2.0*k2+2.0*k3+k4);
}
```

イ 5 点

```
dydx=sin(x)*cos(x)-y*cos(x);
```

2　常微分方程式の数値計算法

2.1　連立一次方程式の解法

[**問 1**] $\boxed{\textit{5}\ 点}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

[**問 2**] $\boxed{\textit{15}\ 点}$

ガウス・ジョルダン法では、解のベクトル $\boldsymbol{x}$ を変えないで、係数行列を、以下の手順で対角化する。

解くべき、方程式

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \tag{1}$$

2 行 $-2\times$1 行

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -3\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ -1\end{pmatrix} \tag{2}$$

3 行 $-2\times$1 行

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ -5\end{pmatrix} \tag{3}$$

$-\frac{1}{2}\times$2 行

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \frac{3}{2}\\ -5\end{pmatrix} \tag{4}$$

1 行 $-2\times$2 行

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\\ -5\end{pmatrix} \tag{5}$$

3 行 $+2\times$2 行

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\\ -2\end{pmatrix} \tag{6}$$

$-\frac{1}{2}\times$3 行

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix} \tag{7}$$

2 行 $-\ \frac{3}{2}\times$3 行

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \tag{8}$$

これで、ガウス・ジョルダン法による対角化の作業は完了である。これから、$(x_1,x_2,x_3)=(-1,0,1)$ と分かる。

2.2 プログラム

20 点

```
/* ========== ガウスジョルダン法の関数 ==================*/
void gauss_jordan(int n, double a[][100], double b[]){

   int ipv, i, j;
   double inv_pivot, temp;

   for(ipv=1 ; ipv <= n ; ipv++){

      /* ---- 対角成分=1(ピボット行の処理) ---- */
      inv_pivot = 1.0/a[ipv][ipv];
      for(j=1 ; j <= n ; j++){
         a[ipv][j] *= inv_pivot;
      }
      b[ipv] *= inv_pivot;

      /* ---- ピボット列=0(ピボット行以外の処理) ---- */
      for(i=1 ; i<=n ; i++){
         if(i != ipv){
            temp = a[i][ipv];
            for(j=1 ; j<=n ; j++){
               a[i][j] -= temp*a[ipv][j];
            }
            b[i] -= temp*b[ipv];
         }
      }

   }
}
```