

# 波動方程式

山本昌志\*

2005年2月14日

## 1 波動方程式とは

ラプラス方程式が済んだので、次に波動方程式に移ろう。その前に、2階の偏微分方程式の種類について説明しておく。2階の偏微分方程式は、ラプラス方程式のように楕円型、次に学習する波動方程式のような双曲型、学習はしないが拡散方程式のような放物型に分けられる。これが、2階の偏微分方程式の代表的な型である。これらの解法を知っておけば、自然現象の多くの問題を計算することができる。いうなれば、超基本の方程式である。

波動方程式は、名前が表しているように波の方程式である。自然科学では、波を扱うことが非常に多い。光、電磁波、量子力学等の問題は全て波を取り扱っている。いろいろな場面で出くわす波の方程式は簡単で、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (1)$$

と書き表すことができる。 $c$ は波の速度である。これは、3次元の場合で、時間を入れると4次元の方程式になり、ちょっと計算するには複雑である。そこで、ここでは空間1次元、時間1次元の2次元の方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (2)$$

を数値計算で解くことを考える。

皆さんは、フーリエ級数を学習したときに、この方程式を解いたとはずである。ここでは、数値計算により近似解を得る方法を学習する。もちろん、フーリエ級数で解いた解は、解析解で完璧である。ただ、フーリエ級数が適用できるのは、空間が1次元の場合である。2次元以上になると境界条件が簡単な場合に限られ、フーリエ級数を用いて計算できる。境界が複雑になると、数値計算で近似解を求めることが重要になる。数値計算は、空間が2次元以上の問題で威力を発揮することになるが、ここでは学習のため、空間が1次元の問題を解くことにする。

具体的な問題を例にして、学習を進める。比較的単純な問題として、図1のような弦の振動を考える。これは、ギターのように両端が固定された弦である。ある時刻 $t$ の位置 $x$ の変位を $u(x, t)$ としている。この変位は波動方程式、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

\*独立行政法人 秋田工業高等専門学校 電気工学科

を満たす。ただし、波の速度は  $c = 1$  とした。こうしても、波動方程式を解くと言う意味はそうは変わらないし、計算が楽になるメリットはある。

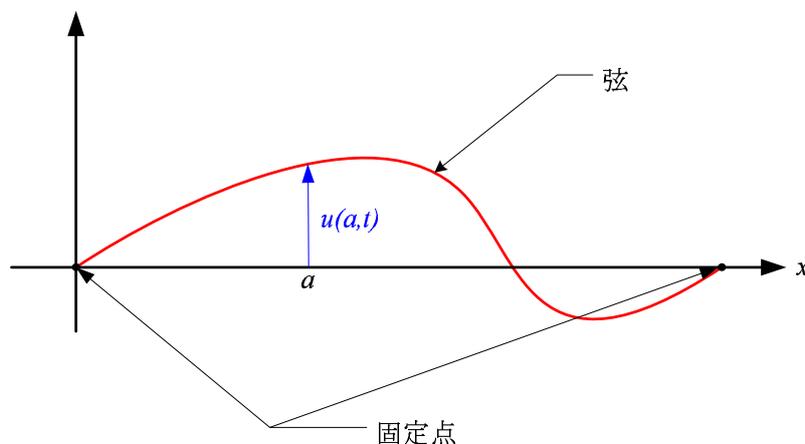


図 1: 時刻  $t$  の弦の様子。

## 2 差分法による 1 次元波動方程式の数値計算

このあたりの説明は、参考文献 [1] を大いに参考にした。これは分かりやすい教科書なので、読んでみると良いだろう。

### 2.1 差分方程式

1 次元波動方程式を数値計で解くことを考える。その前に、解くべき方程式と条件をきちんと書いておく。解くべき方程式と条件は、

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & (0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t) \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

となる。弦を伝わる波の速度は 1、弦の長さも 1 としている。この最初の式は波動方程式であるが、2 番目を初期条件、3 番目を境界条件と言う。2 番目の初期条件は、 $t = 0$  の時の弦の状態を示しており、 $\phi(x)$  はそのときの弦の形 (変位)、 $\psi(x)$  は弦の変位の速度である。

波動方程式の他に、初期条件と境界条件がある。力学的状態は、ある時刻、ここでは  $t = 0$  の時の変位とその変位の速度が決まれば、それ以降を決めることができる。振動の場合は、これに加えて更に、振動の境界条件を決める必要がある。これらが決まって初めて、波動方程式とともに、振動の状態、ある時刻と位置の変位の値が決まるわけである。図 4 に初期条件と境界条件の様子を示す。

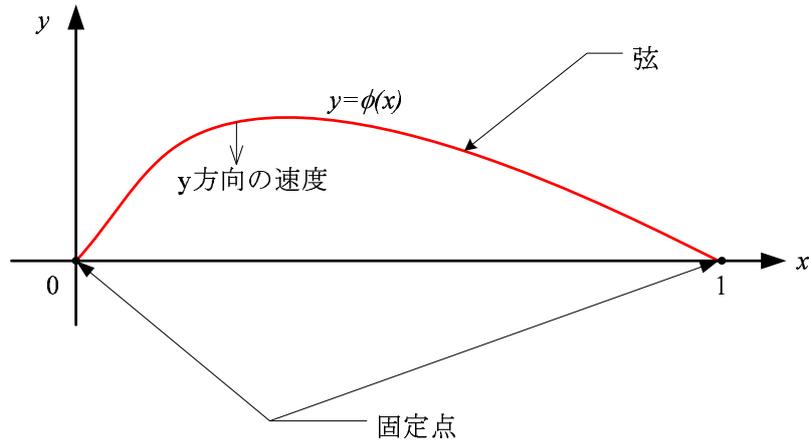


図 2: 時刻  $t = 0$  のときの弦の様子 (スナップショット)。初期条件と境界条件が表されており、 $y$  方向の速度が  $\psi(x)$  になっている。

まずは、波動方程式を差分方程式に書き直すことから始める。これも、いつものように、解  $u(x, t)$  をテイラー展開する。 $x$  方向の微小変位を  $\Delta x$ 、時間軸方向の微小変位を  $\Delta t$  とする。すると、

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^4 + \dots \\ u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (\Delta x)^4 - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

となる。これらの式の辺々を足し合わせると、

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x,y} = \frac{1}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)] - O(\Delta x^2) \quad (6)$$

が得られる。このことから、2 階の偏導関数の値は微小変位  $\Delta x$  の場所の関数の値を用いて、 $(\Delta x)^2$  の精度で近似計算ができることが分かる。すなわち、式 (6) の右辺の第 1 項を計算すればよいのである。ラプラス方程式と同じである。同様なことを時間軸方向についても行うと

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x,t} = \frac{1}{\Delta t^2} [u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)] - O(\Delta t^2) \quad (7)$$

が得られる。

これらの式 (6) と (7) を元の波動方程式 (4) に代入すれば、

$$\frac{1}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)] = \frac{1}{\Delta t^2} [u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)] \quad (8)$$

となる。これが、1 次元波動方程式の差分の式である。この式を計算し易いように、もう少し変形すると、

$$u(x, t + \Delta t) = 2u(x, t) - u(x, t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)] \quad (9)$$

とすることができる。この式の右辺は、時刻  $t$  と  $t - \Delta t$  の値である。そして、左辺は時刻  $t + \Delta t$  の値である。このことから、式 (9) を用いると、時刻  $t$  と  $t - \Delta t$  の値から、 $t + \Delta t$  の値が計算できることになる。

実際に式 (9) を数値計算する場合、 $x$  方向には  $\Delta x$ 、時間軸方向には  $\Delta t$  毎に分割する。ラプラス方程式を格子点で分割したのと同じである。格子点に分割し数値計算する場合、 $u(x, t)$  や  $u(x + \Delta x, y)$  と表現するよりは、 $u_{ij}$  と表現したほうが便利である。そこで、

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(i\Delta x, j\Delta t) \\ &= u_{ij} \end{aligned} \tag{10}$$

と表現を改める。このようにすると、式 (9) は

$$u_{ij+1} = 2u_{ij} - u_{ij-1} + \alpha(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) \tag{11}$$

となり、数値計算し易い形になる。ただし、

$$\alpha = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \tag{12}$$

である。

この式を用いた計算の様子を図 3 に示す。

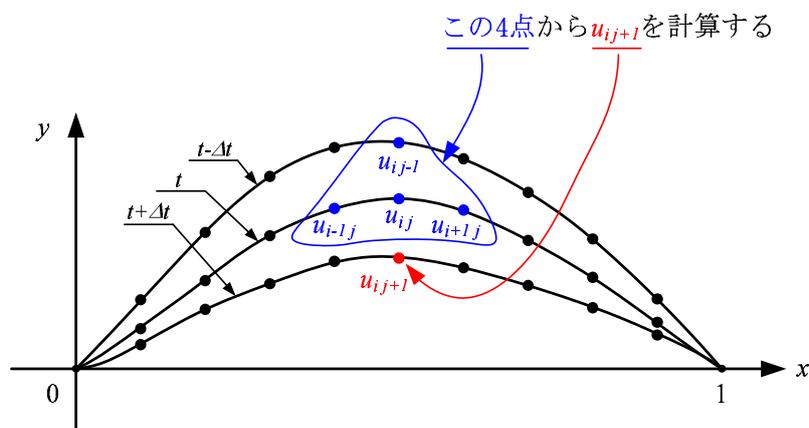


図 3: 差分方程式の計算の様子

波動方程式というけったいな偏微分方程式が、ただ単に数値を順番に代入していく式に変換されたわけである。この計算は非常に簡単である。ただ、時間領域を 1000 分割 ( $N_t = 1000$ )、 $x$  軸領域も 1000 分割 ( $N_x = 1000$ ) すると、100 万回の計算が必要であるが、コンピューターにとって、その程度の計算は大したことはない。

## 2.2 初期条件

式 (11) を計算すると、 $t = 0$  の状態から、時間の経過によって弦の様子がどうなるか分かる。以下のように、芋づる式に、弦の変位が計算できるわけである。

$$\begin{array}{cccccccc}
 u_{10} & u_{20} & u_{30} & u_{40} & u_{50} & \cdots & u_{N_x-10} & \\
 & & & \Downarrow & & & & \\
 u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} & u_{51} & \cdots & u_{N_x-11} & \\
 & & & \Downarrow & & & & \\
 u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} & \cdots & u_{N_x-12} & \\
 & & & \Downarrow & & & & \\
 u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} & \cdots & u_{N_x-13} & \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & \\
 u_{1N_t} & u_{2N_t} & u_{3N_t} & u_{4N_t} & u_{5N_t} & \cdots & u_{N_x-1N_t} & 
 \end{array}$$

このように、計算を盲目的に進めれば、弦の振動の式 (4) の数値計算の結果である近似解が得られる。当然、境界条件

$$u_{0j} = u_{N_x j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots, N_t) \quad (13)$$

を、忘れてはならない。

これを計算するためには、まず、 $u_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_x - 1$ ) の値を決める必要がある。これ以前の状態が分からないので、式 (11) は使えないが、式 (4) の初期条件が使える。すなわち、

$$u_{i0} = \phi(i\Delta x) \quad (14)$$

である。

次に、 $u_{i1}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_x - 1$ ) を計算するわけであるが、まだ、式 (11) は使えない。なぜならば、この式は 2 つ前の状態まで必要なので、これまでのところ、一つ前の状態しか分かっていないからである。そこで、2 番目の初期条件 (変位の速度) を使うことになる。計算したい量は  $u(x, \Delta x)$  なので、とりあえずテーラー展開してみる。これを、 $t = 0$  の周りでテーラー展開すると、

$$\begin{aligned}
 u(x, \Delta t) &= u(x, 0) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + O(\Delta x^3) \\
 &\quad \text{初期条件と波動方程式より} \\
 &= u(x, 0) + \psi(x) \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta t)^2 + O(\Delta x^3)
 \end{aligned} \quad (15)$$

となる。この右辺の第 1 と 2 項は簡単に計算できる。問題は第 3 項であるが、これは見覚えのある式である。式 6 と同じである。これを代入すると、

$$\begin{aligned}
 u(x, \Delta t) &\approx u(x, 0) + \psi(x) \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)] \\
 &\approx u(x, 0) + \psi(x) \Delta t + \frac{\alpha}{2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)]
 \end{aligned} \quad (16)$$

となる。これは、めでたい式である。右辺は、 $t = 0$  のみの値で構成されている。これで、 $u_{i1}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N_x - 1$ ) が計算可能になった。この式から、

$$u_{i1} = u_{i0} + \psi(x_i)\Delta t + \frac{\alpha}{2} [u_{i+10} - 2u_{i0} + u_{i-10}] \quad (17)$$

が得られる。

以上より、 $u_{i0}$  と  $u_{i1}$  が得られたわけである。 $u_{i2}$  以降は、式 (11) に従い、計算すればよい。

### 3 実際の計算方法

ここで、実際のプログラムを作成する上で、一つだけ注意を与えておく。プログラムが安定に動作するためには、位置と時刻の微小変化の比の 2 乗は、

$$\alpha \leq 1 \quad (18)$$

である必要がある。この値は、繰り返し計算をすると、その回数だけ乗算される。即ち、 $n$  回の繰り返し計算があれば、 $\alpha^n$  が現れる。もし、 $\alpha$  が 1 以上であれば、早急に発散するであろう。従って、これは 1 以下になるように、微小変化を考えなくてはならない。

### 4 練習問題 (定在波)

ラプラス方程式のプログラムを参考にして、練習問題のプログラムを作成せよ。

図 4 のようにギター の弦を留め金でとめている。 $t = 0$  の瞬間に留め金はずした場合、その振動はどうなるか?。 $t = 1$  まで、振動の様子を数値計算で求め、それをアニメーションで表示せよ。予め頭で想像したものと結果は大きく食い違うはずである。非常に、興味深い結果が得られるはずである。この問題は、フーリエ級数の時間に学習した??。

ヒントを与えておく。 $t = 0$  のとき、止められていた弦が動き始める。従って、このときの速度はゼロであるので、初期条件

$$\psi(x) = 0 \quad (19)$$

となる。

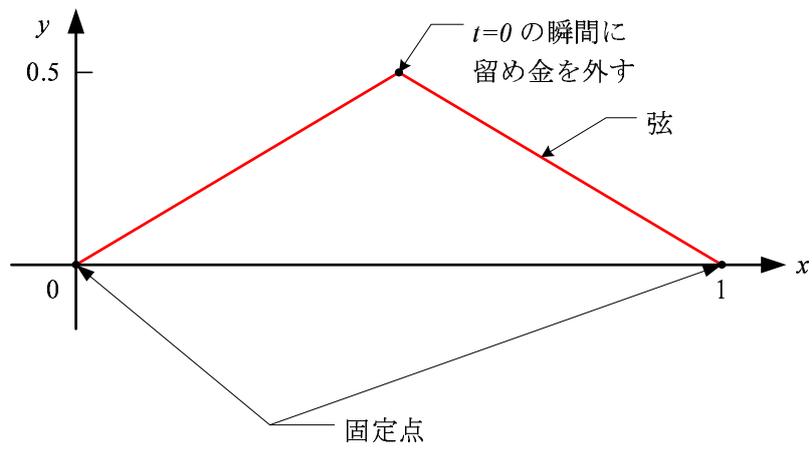


図 4: 問題の弦

## 5 進行波の取り扱い

先の練習問題、弦を三角形に張った後の様子は、定在波である。ここでは、進行波の記述方法について、コメントしておく。進行波を数値計算すると面白いのでその方法を示す。進行波を記述するためには、初期条件さえ記述すれば、後の差分方程式は同じである。その初期条件の記述の仕方を示す。

元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (20)$$

には、明らかに、ダランベールの解

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (21)$$

というものがある。これは元の波動方程式に代入すれば、それを満足していることは直ちに理解できる。ここで、 $f(x - ct)$  は  $x$  軸を正の方向に進む進行波 (forward wave) で、 $g(x + ct)$  は負の方向に進む後進波 (backward wave) である。

初期条件

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (22)$$

の波が  $x$  軸を正の方向に進む進行波として取り扱うには、どうしたらよいだろうか?。のこる条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (23)$$

である。進行波になるように、 $\psi(x)$  を決めればよい。 $u(x, t)$  を進行波と仮定すると、式 (22) から

$$u(x, \Delta t) = \phi(x - c\Delta t) \quad (24)$$

となる。この式を使って、 $\psi(x)$  を求めることにする。 $\psi(x)$  の定義より、

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, \Delta t) - u(x, 0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(x - c\Delta t) - \phi(x)}{\Delta t} \\ &\quad c\Delta t = \Delta x \text{ とおくと} \\ &= -c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(x - \Delta x)}{\Delta x} \\ &= -c \frac{d\phi}{dx} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。進行波にするためには、 $\psi(x)$  は  $\phi(x)$  の導関数にすればよいのである。

念のため言うておくが、後進波にするためには

$$\psi(x) = c \frac{d\phi}{dx} \quad (26)$$

とすればよい。

## 6 練習問題 (進行波)

前回の問題の弦の上を進む進行波と後進波について、計算してみよう。弦の長さ  $L = 1$ 、波の速度は  $c = 1$ 、両端は固定されているとする。その条件のもとで、以下 2 つの波が衝突する様子を計算せよ。

後進波は、

$$\phi_1(x) = a \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2} \right]$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= 0.5 \\ \sigma_1 &= 0.02 \\ x_1 &= 0.8 \end{aligned} \tag{27}$$

とする。そして、進行波は、

$$\phi_2(x) = a(x - x_0) \exp \left( -\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2} \right)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= 20 \\ \sigma_1 &= 0.02 \\ x_0 &= 0.4 \end{aligned} \tag{28}$$

とする。 $t = 0$  のときの様子を、図 5 に示す。波の衝突で、その形はどうか?。壁に衝突するとどうなるか? 計算せよ。

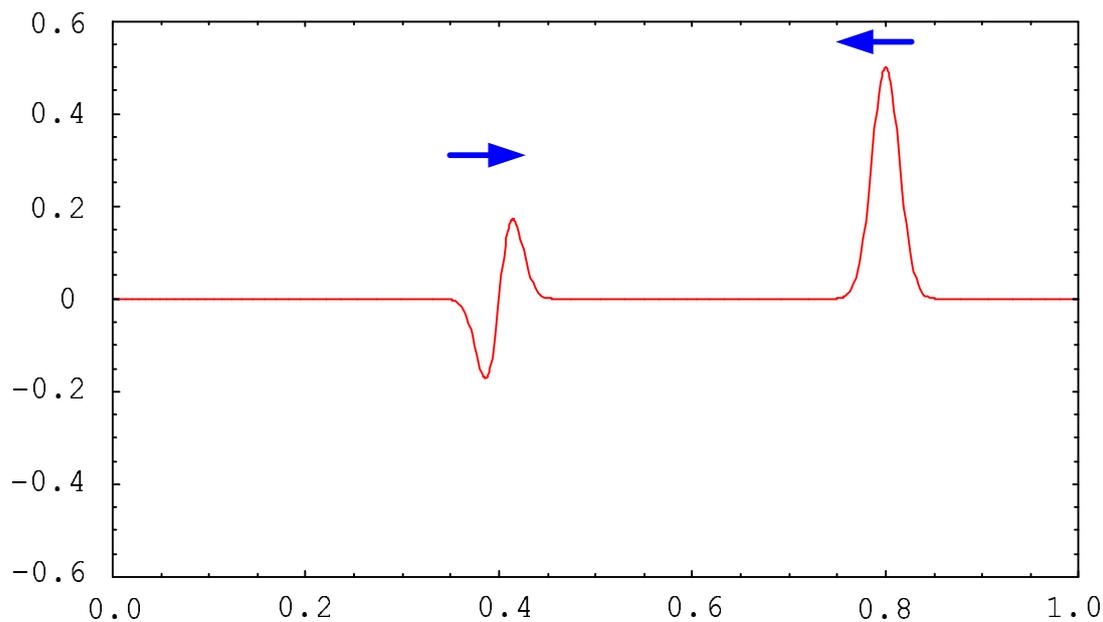


図 5:  $t = 0$  の時の進行波と後進波の様子。

## 参考文献

- [1] 高橋大輔. 数值計算. 岩波書店, 1996.