ニュートン法

山本昌志*

2004 年 7 月 15 日

1 概要

前回の「非線型方程式の数値計算法」でニュートン法により、実数解を求める方法を学習した。そのとき、連立方程式や複素数解が求められると言ったので、そのことについて、説明を行う。内容は、実数解を求める方法とほとんど同じであるが、数を拡張している。いままでの学習内容を十分理解していれば、これから述べることは分かるであろう。理解できないにしても、いずれは理解できるものと期待している。内容が理解できなくても、なにか面白そうだと思ってもらえれば、十分である。

2 非線型方程式の複素数解

2.1 実数解の場合

複素数に進む前に実数のニュートン法の復習を行う。以前配布 (7 月 1 日) したプリントでは、図によるニュートン法の説明を行い、漸化式を示した。ここでは、別のアプローチを行う。別のアプローチであるが、その根本精神は同じで、

- 解に近いところでは、直線で近似できる[1]。

ということである。

では、異なったアプローチで漸化式を求める。いつものように、$f(x) = 0$ の方程式の解を $x = \alpha$ とする。即ち、$f(\alpha) = 0$ である。そして、i 番目の近似解を x_i とする。ここから、Δx だけ移動したところの値は、

$$
\begin{aligned}
f(x_i + \Delta x) &= f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_i)\Delta x^2 + \cdots \\
&\qquad \text{ただし、}\Delta x\text{ が小さい場合} \\
&\simeq f(x_i) + f'(x_i)\Delta x
\end{aligned}
\tag{1}
$$

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

[1]解に近い必要はなく、実際には、狭い範囲は直線で近似できるということである。特異点は別。

となる。もし、$f(x_i+\Delta x)=0$、即ち、$\alpha=x_i+\Delta x$ となるように、Δx を選ぶことができたら、解の計算は簡単である。この場合、式 (1) の最後の式から、

$$\Delta x \simeq -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2}$$

となる。したがって、$\alpha=x_i+\Delta x$ から、次の近似解は

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{3}$$

となる。前回、図により求めた漸化式と同じである。異なる説明であったが、内容はまったく同じであることを理解して欲しい。

2.2 複素数解の場合

2.2.1 漸化式

実数とまったく同じ議論が、複素数でも成り立つ。ただし、複素関数で重要な特異点付近では、この方法は使えない。テイラー級数ではなく、ローラン級数の -1 乗よりも小さい項が重要となるからである。実数の場合も、特異点はだめなのと同じである。

実数とまったく同じ議論より、方程式

$$w(z)=0 \tag{4}$$

の近似解は、漸化式

$$z_{i+1}=z_i-\frac{w(z_i)}{w'(z_i)} \tag{5}$$

より求めることができる。この式の算出は、先ほどの実数の場合と全く同じである。

前回とは異なり、実数の場合の漸化式をグラフを用いないで説明したのは、複素数に拡張するためである。複素数のグラフは大変である。

2.2.2 プログラム作成のために

FORTRAN と違って、C 言語では複素数をそのまま扱うことができない。FORTRAN は複素数をそのまま扱えるのである。これは非常に便利で、いまだに科学技術計算で FORTRAN が現役である大きな理由となっている。一方、C 言語の場合、2 つの実数を用いて、複素数を取り扱う。実数部と虚数部である。これは、数学で学習したように

$$z=x+iy \tag{6}$$

とすればよい。x と y を用いるわけである。C 言語では、構造体で定義するのが美しいと思われるが、学習していないので、ここではどうでも良い。

同様に関数も

$$w(z)=u(z)+iv(z) \tag{7}$$

と実数部と虚数部に分けて計算する。

3　練習問題

[問 1]　ニュートン法を用いて、次の非線形方程式の複素数の近似解を求めるプログラムを作成せよ。

$$z^3 - 3z^2 + 9z - 8 = 0$$

ちなみに、複素数の近似解は、

$$z = 0.91704720793889364143180634077 + 2.45369996069857723147134512148i$$
$$z = 0.91704720793889364143180634077 - 2.45369996069857723147134512148i$$

である。実数解は、

$$z = 1.16590558412221271713638731846$$

である。