課題　常微分方程式

山本昌志*

2004 年 10 月 19 日

1　はじめに

今まで学習してきた常微分方程式の数値計算を用いて、電気に関する問題を考える。計算結果については、課題として提出すること。提出方法については、3 節の「レポート提出要領」に従うこと。

2　問題

2.1　LCR 回路

もっと実用的な常微分方程式を解くことにする。電気の諸問題の常微分方程式は 2 階の場合が多い。例えば、図 1 のような回路である。最初、コンデンサーにある電荷が蓄えられていたとする[1]。そうして、ある瞬間 (t=0) にスイッチ SW を ON にしたとする。この場合、回路に流れる電流は時間とともにどのように変化するか?。数値計算によりそれを求めることにする。

まず、この回路に流れる電流の微分方程式を導かなくてはならない。これを、エネルギーという観点から考えよう。コンデンサーとコイルに蓄えられたエネルギーの時間的な変化が抵抗で消費される電力になる。コンデンサーに蓄えられるエネルギーは $\frac{1}{2}CV^2$ で、コイルに蓄えられるエネルギーは $\frac{1}{2}LI^2$ である。一方、抵抗で消費される電力は、I^2R である。これらの関係を式で表すと、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2+\frac{1}{2}LI^2\right)+I^2R=0 \tag{1}$$

となる。

この式では、電流 I と電圧 V が時間の関数となっている。これでは見通しが悪いので、電圧の項をコンデンサーの式を用いて消去することを考える。コンデンサーに蓄えられる電荷を q とすると、$q=CV$ という関係がある。これから、$\frac{dq}{dt}=C\frac{dV}{dt}$ が直ちに導かれる。ここで、電荷量の時間変化は電流となるので、

*国立秋田工業高等専門学校　電気情報工学科

[1]コンデンサーに蓄えられる電荷と言う表現をするが、実際にはコンデンサーには電荷は蓄えられない。各々の電極に $+q$ と $-q$ の電荷が現れるが、双方を合計するとゼロになる。

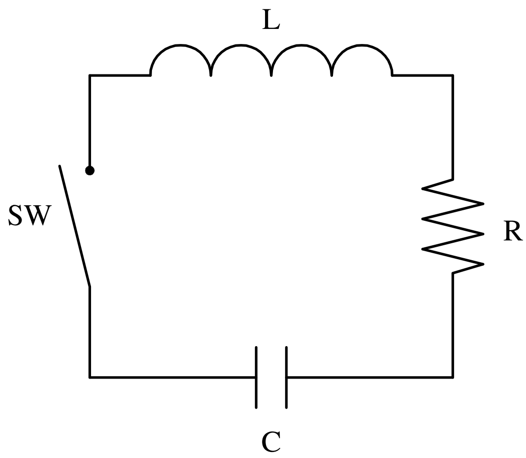

図 1: LCR 直列回路

$\frac{dq}{dt} = I$ となることに注意する。これらの関係式を用いて、式 (1) を書き直す。すると、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}LI^2\right) + I^2R = 0 \\ &CV\frac{dV}{dt} + LI\frac{dI}{dt} + I^2R = 0 \\ &C\frac{q}{C}\frac{I}{C} + LI\frac{dI}{dt} + I^2R = 0 \\ &\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

の関係式を導くことができる。最後の式の両辺の時間で微分すると、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR\right) = 0 \\ &\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} = 0 \\ &L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

となる。これで、電流 I のみ常微分方程式になる。これを解けばよいわけである。

2 階の常微分方程式は、1 階の連立常微分方程式に直すのがセオリーである。これは、

$$\begin{cases} I_0 = I \\ I_1 = \dfrac{dI}{dt} \end{cases} \tag{4}$$

と変数変換を行う。すると、式 (3) の最後の式は、

$$\begin{cases} \dfrac{dI_0}{dt} = I_1 \\ \dfrac{dI_1}{dt} = -\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{I_0}{C} + RI_1\right) \end{cases} \tag{5}$$

と書き直せる。

これを、4 次のルンゲ・クッタ法で計算する場合、

$$\begin{cases} k_{01} = hI_{1\_n} \\ k_{11} = h\dfrac{1}{L}\left(-\dfrac{1}{C}I_{0\_n} - RI_{1\_n}\right) \\ k_{02} = h\left(I_{1\_n} + \dfrac{k_{11}}{2}\right) \\ k_{12} = h\dfrac{1}{L}\left\{-\dfrac{1}{C}\left(I_{0\_n} + \dfrac{k_{01}}{2}\right) - R\left(I_{1\_n} + \dfrac{k_{11}}{2}\right)\right\} \\ k_{03} = h\left(I_{1\_n} + \dfrac{k_{12}}{2}\right) \\ k_{13} = h\dfrac{1}{L}\left\{-\dfrac{1}{C}\left(I_{0\_n} + \dfrac{k_{02}}{2}\right) - R\left(I_{1\_n} + \dfrac{k_{12}}{2}\right)\right\} \\ k_{04} = h\left(I_{1\_n} + k_{13}\right) \\ k_{14} = h\dfrac{1}{L}\left\{-\dfrac{1}{C}\left(I_{0\_n} + k_{03}\right) - R\left(I_{1\_n} + k_{13}\right)\right\} \\ I_{0\_n+1} = I_{0\_n} + \dfrac{1}{6}(k_{01} + 2k_{02} + 2k_{03} + k_{04}) \\ I_{1\_n+1} = I_{1\_n} + \dfrac{1}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}) \end{cases} \tag{6}$$

となる。これを、数値計算により時間の刻み幅 h 毎に計算視すればよい。

これを解くためには、L と C、R の値と初期条件が必要である。それぞれを以下のようにする。

- インダクタンス L とキャパシタンス C は、1 とする。
- スイッチ SW を ON にした瞬間 (t=0)、インダクタンス L があるので電流は流れない。$I(0) = 0$ となる。また、$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = 1$ とする。$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = 1$ になるような電荷が蓄えられているわけである。

このような状況のもと、以下の場合について計算せよ。

1. まずはじめに、$R = 1$ の場合について、電流の様子を計算せよ。
2. $R = 0, 1, 2, 3, 4$ の場合について、電流の様子を計算せよ。臨界減衰の時、どうなるか?
3. 抵抗が電流に比例する場合 $R = kI$、どうなるか計算せよ。$k = 0.1, 1, 10$ の場合を計算してみよう。このような場合、非線形な方程式になる。従って、通常は解析解ないが、数値計算は可能である。コンピューターは、すばらしい結果を与えてくれる。

プログラムのヒントをあたえよう。I_{0_n} と I_{1_n} は、それぞれ `I0[n]` や `I1[n]` のような配列に格納する。そして、初期値は `I0[0]`=0 と `I1[0]=1` で表せる。ついでに時刻も配列 `time[n]` を使う。当然、`time[0]=0` で、`time[n+1]=time[n]+h` のように計算する。最終的な解は、`I0[n]` と `time[n]` の関係が重要になる。

このプログラムのソースコードは、プリントアウトして、レポートとして提出すること。

2.2 高階の微分方程式

配布したテキスト「常微分方程式の数値計算法」の「3.2 練習問題」を行うこと。結果は、レポートとして提出すること。式の変形は、できるだけ丁寧に行い、説明や途中の計算を省かないこと。

3 レポート提出要領

提出方法は、次の通りとする。

期限　11 月 16 日 (火)PM5:00 まで

用紙　A4

提出場所　山本研究室の入口のポスト

表紙　表紙を 1 枚つけて、それには以下の項目が書かれていること。

　授業科目名「計算機応用」

　課題名「常微分方程式 (1)」

　5E　学籍番号　氏名

　提出日

内容　以下の課題の結果が書かれていること。

　LCR 回路を計算したソースプログラムのプリントアウト

　高階の微分方程式を 1 階の連立微分方程式への式変形