前期末テスト　計算機応用　5E

2003.09.29

学籍番号________ 氏名 ____________________________

1 テイラー展開

(1) 関数 $f(x)$ を $x=a$ の周りでテイラー展開する式を示しなさい。(5 点)

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

(2) 問 (1) を $a=0$ として、マクローリン展開の式を示しなさい。(5 点)

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

(3) 問 (1) を $x-a=\Delta x$ 、 $a=x_0$ の時のテイラー展開の式 $f(x_0+\Delta x)=\cdots$ を示しなさい。(5 点)

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n$$

2. 非線型方程式の数値計算法

$f(x)=0$ の方程式の近似解を数値計算により求める方法に関しての問題である。

2.1 二分法

(1) 二分法による方程式の解の計算方法の考え方を説明せよ。(5 点)

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ の値が

$$f(a)f(b)<0$$

の場合、$f(\alpha)=0$ となる α が区間 $[a,b]$ にある。2 分法はこの性質を利用して近似解を求める。実際の数値計算のプログラムでは、区間 $[a,b]$ の中点 c を計算し、 $f(a)f(c)$ と $f(c)f(b)$ のうち負になるほうを新たな区間 $[a,b]$ とする。1 回この操作を行うことにより、解が存在する区間の領域が半分になる。これを繰り返すことにより、任意の精度で方程式の近似解を求めることができる。

(2) 二分法のフローチャートを図 1 に示す。図 1 の (ア) から (エ) に当てはまる適当な処理を以下の①〜⑮の中から選択しなさい。ただし、ε が解の精度を表すものとする。(各 2 点)

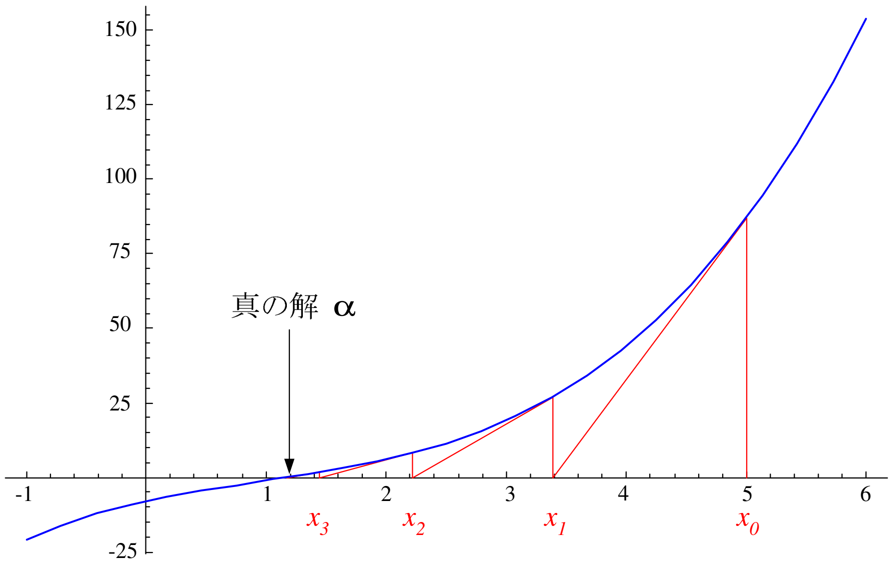
① $f(a)f(c)>0$	② $b-a<c$	③ $c=f(a)f(b)/2$	④ $c\leftarrow b$	⑤ $c=(a+b)/2$
⑥ $f(a)f(c)=0$	⑦ $b-a<\varepsilon$	⑧ $a=f(b)f(c)/2$	⑨ $b\leftarrow c$	⑩ $a=(b+c)/2$
⑪ $f(a)f(c)<0$	⑫ $b-a>\varepsilon$	⑬ $b=f(c)f(a)/2$	⑭ $a\leftarrow c$	⑮ $b=(c+a)/2$

(ア) ⑫　(イ) ⑤　(ウ) ⑪　(エ) ⑨

2.2 ニュートン法

(1) ニュートン法で近似解を計算する考え方を示しなさい。グラフを使って、説明すること。2 次収束の記述は不要 (5 点)

図に示すように、関数 $f(x)$ のゼロ点 α に近い近似値 x_0 から出発します。そして、関数 $f(x)$ 上の点 $(x_0, f(x_0))$ での接線が、x 軸と交わる点を次の近似解 x_1 とします。そして、次の接線が x 軸と交わる点を次の近似解を x_2 とします。同様に $x_3, x_4, x_5, \ldots$ を計算します。この様子は、図のとおりです。この計算結果の数列 $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$ は、初期値 x_0 が適当であれば、真の解 α に収束する。このように接線と x 軸との交点の計算を繰り返すことで、方程式の近似階を求めています。



(2) ニュートン法で近似解を求める場合の漸化式を導きなさい。導く過程も示すこと。(5 点)

関数 $f(x)$ 上の点 $(x_i, f(x_i))$ での接線が x 軸と交わる点が、次の近似解 x_{i+1} となる。まず、この接線の方程式は、

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

となる。x 軸との交点の x 座標は、は $y = 0$ の時の x の値である。したがって、 $y = 0$， $x = x_{i+1}$ とすれば漸化式になる。これらを代入して、式を整理すると、

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

となり、ニュートン法の漸化式になる。

(3) ニュートン法のフロチャートを図 2 に示す。図 2 の (ア) から (オ) に当てはまる、処理を以下の①～⑳の中から選択しなさい。ただし、ε は解の精度を判定する小さい値である。imax は、最大反復回数である。(各 2 点)

① $\lvert (x_{i+1} - x_i)/x_i \rvert < \varepsilon$	② $x_{i+1} = x_i - (k1 + k2)/2$	③ $k = f(x_i)$	④ $i \geqq imax$	⑤ 収束しないと表示
⑥ $\lvert (x_{i+1} - x_i)/x_i \rvert > \varepsilon$	⑦ $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$	⑧ $k = f(x_{i+1})$	⑨ $i \leqq imax$	⑩ 解 x_{i+1} を表示
⑪ $\lvert (x_{i+1} + x_i)/x_i \rvert < \varepsilon$	⑫ $x_{i+1} = x_i - f'(x_i)/f(x_i)$	⑬ $k = f(\Delta x)$	⑭ $i \geqq x_i$	⑮ 解 $f(x_{i+1})$ を表示

(ア) ⑦　(イ) ①　(ウ) ⑨　(エ) ⑤　(オ) ⑩

(4) 二分法と比較した場合、ニュートン法の長所と短所をのべよ。(5 点)

[長所]　初期値が適当ならば、解への収束が二分法に比べて非常に早い。

[短所]　二分法は必ず解へ収束するが、ニュートン法は初期値が悪いと収束しない場合がある。

3. 常微分方程式の数値計算法

ここは、以下の常微分方程式の数値計算に関する問題である。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

3.1 オイラー法

テイラー展開から、オイラー法の公式とそれが1次の精度であることを示しなさい。（10点）

常微分方程式の解を $y = y(x)$ とします。この解の x_i の周りのテイラー展開は、

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} h + O(h^2)$$

となります。ここで、導関数は問題より与えられますので、

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i)$$

となります。したがって、h が小さいならば、

$$y(x_i + h) = y(x_i) + f(x_i, y_i)h$$

と近似できます。$y(x_i + h) = y_{i+i}$ とおくと、

$$y_{i+1} = y(x_i) + f(x_i, y_i)h$$

オイラー法の公式となります。手順に示した通り剰余項は $O(h^2)$ なので、精度は1次です。

3.2 ホイン法(2次のルンゲクッタ法)

ホイン法の漸化式を求める手順は、以下の通りです。かっこ内に適当な式を入れよ。（各2点）

ホイン法は2次の精度がある。2次の精度ということは、テイラー展開より、

$$y(x_0 + h) = (\quad ア \quad) + O(h^3)$$

となっていることを意味します。計算アルゴリズムが、

$$\Delta y = (\quad イ \quad) + O(h^3)$$

になっていることを言います。ホイン法では、y の増分 Δy を計算するためには、計算区間の両端の点 x_0 と $x_0 + h$ を使います。区間の増分を α と β のパラメーターとした和で表すことにします。即ち、以下の通りです。

$$\Delta y = h\{\alpha y'(x_0) + \beta y'(x_0 + h)\}$$

この式を x_0 の周りでテイラー展開すると、

$$\Delta y = (\quad ウ \quad) + O(h^3)$$

となります。これを、元の式と比較すると、

$$\begin{cases} \alpha = (\quad エ \quad) \\ \beta = (\quad オ \quad) \end{cases}$$

とすればよいことが分かります。この結果から、ホイン法の漸化式は、

$$\begin{cases} k_1 = (\quad カ \quad) \\ k_2 = (\quad キ \quad) \\ y_{n+1} = (\quad ク \quad) \end{cases}$$

と想像がつきます。

（ア）
$$y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2$$

（イ）
$$y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2$$

（ウ）
$$(\alpha + \beta)y'(x_0)h + \beta y''(x_0)h^2$$

（エ）
$$\frac{1}{2}$$

（オ）
$$\frac{1}{2}$$

（カ）
$$hf(x_n, y_n)$$

（キ）
$$hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

（ク）
$$y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

3.3 4次のルンゲ・クッタ法

4次のルンゲ・クッタ法の漸化式(4次のルンゲ・クッタの公式)を書きなさい。(5点)

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

3.4 それぞれの方法の比較

図3は、オイラー法とホイン法(2次のルンゲ・クッタ法)、4次のルンゲクッタ法について、漸化式に基づいて解を計算している様子を示している。図中の矢印は、その根元の座標の方向場を表す。図の[A], [B], [C]は、それぞれどの方法をあらわすか?。

解を計算する刻み巾 h が等しい場合、計算精度の良い順に各方法を並べよ。(各5点)

図の対応　A→(オイラー法)　B→(ホイン法)　C→(4次のルンゲ・クッタ法)

計算精度の良い順序　(4次のルンゲ・クッタ法)→(ホイン法)→(オイラー法)

3.5 高階の常微分方程式法

以下の2階の微分方程式を、1階の連立微分方程式に書き換えなさい。ただし、ルンゲ・クッタ法が使いやすいように、以下の形に連立方程式をまとめること。(各3点)

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = g(x, y_0, y_1) \\ \dfrac{dy_1}{dx} = h(x, y_0, y_1) \end{cases}$$

(1) $y'' + 3y' + 5y = 0$

以下の変数変換を行います。

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x) \\ y_1(x) = y'(x) \end{cases}$$

すると、

$$\frac{dy_0}{dx} = y_1$$

が、直ちに導けます。そして、元の式に変数変換の式を代入すると、

$$\frac{dy_1}{dx} = -5y_0 - 3y_1$$

となります。これで必要な式が求まった。まとめると、以下のようになる。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = -5y_0 - 3y_1 \end{cases}$$

(2) $xy'' + y' + y = e^x$

問(1)と同様の変数変換を行い、元の式に代入すると

$$x\frac{dy_1}{dx} + y_1 + y_0 = e^x$$

となる。これを整理すると、

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{e^x - y_0 - y_1}{x}$$

となる。したがって、連立微分方程式は以下のようになる。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{e^x - y_0 - y_1}{x} \end{cases}$$

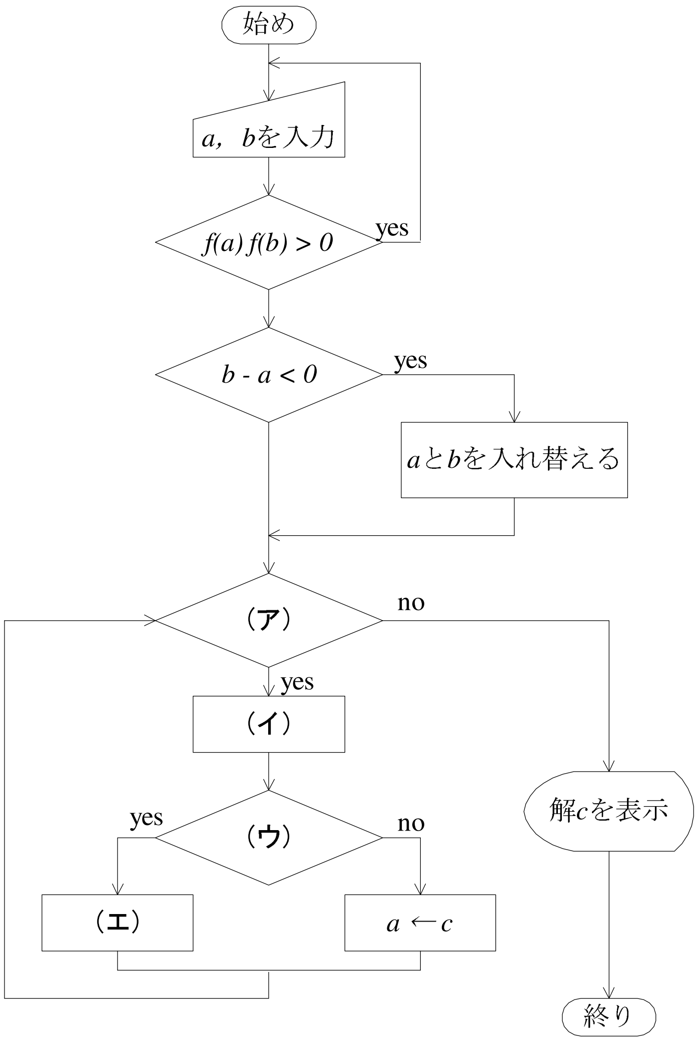


図１ ２分法のフローチャート

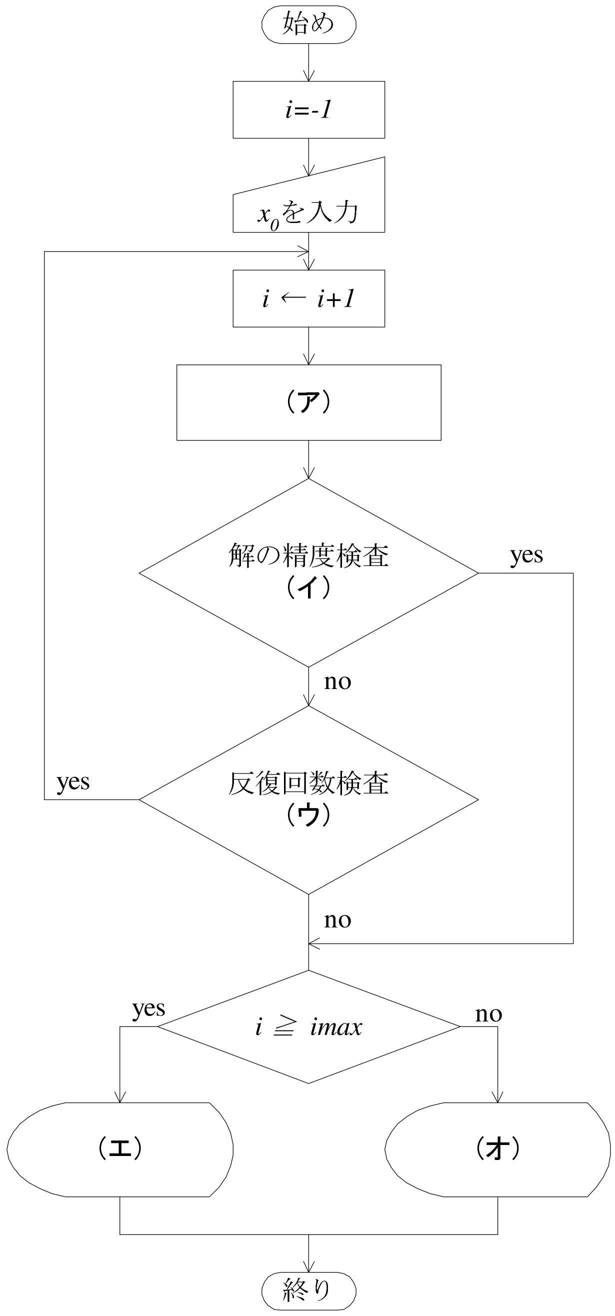


図２ ニュートン法のフローチャート

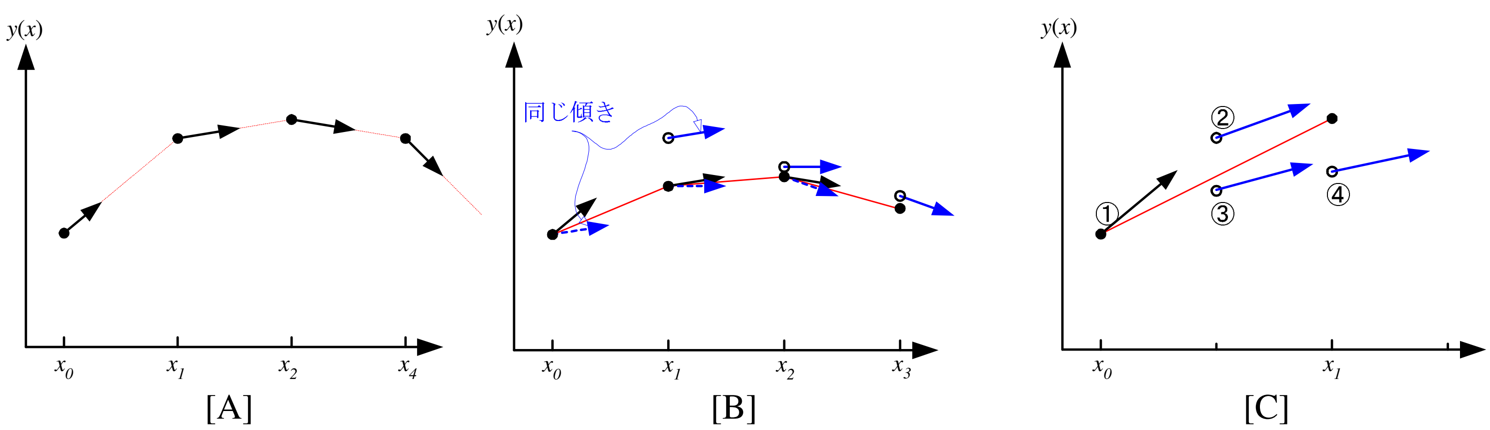


図３ 常微分方程式の計算方法