積分

山本昌志*

2003 年 1 月 20 日

1　はじめに

数学の授業で学習したように、どんな複雑な関数でも微分は可能である。一方、積分となるとそうはいかない。積分の学習では、どのようにして積分を行うかといういろいろなテクニックを学んだはずである。微分に比べれば、圧倒的に計算が難しいことも経験済みであろう。

例えば、ガウス分布を表す以下の関数を考える。

$$f(x) = e^{-x^2} \tag{1}$$

この関数の微分すること (導関数) は、簡単で

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \tag{2}$$

となることは説明の必要がないであろう。今まで学習してきたように、初等関数で表すことができる関数の微分は、初等関数で表現できるのである。要するに微分 (導関数) の値を求めたいときには、人間が実際に微分をして、初等関数を計算すればよいのである。

一方、積分となるとそうはいかない。先の式 (1) の不定積分を初等関数で表すことができない。初等関数からできた関数であろうとも、不定積分は初等関数の範囲を超えることがある。だからといって、定積分の値 (数値) が不定というわけではない。

いろいろ計算をしていると、不定積分はできないが、定積分の値が必要な場合がしばしば訪れる。そのときに、ここで学習する定積分を数値計算で求めるテクニックが使われる。

定積分は、図 1 に示すように面積の計算になる。したがって、直感的にわかりやすく、アルキメデスの時代からあった。一方、微分法はニュートンの時代とすると、およそ 2000 年の開きがあるのである。

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

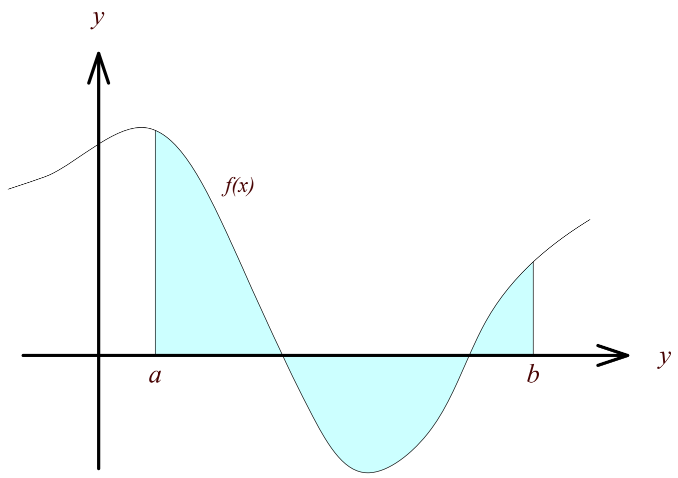

図 1: 定積分と面積

2　台形公式

2.1　台形公式の求め方

定積分、

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

の近似値を数値計算で求めることを考える。積分の計算は、先に示したように面積の計算であるから、図 2 のように台形の面積の和で近似ができるであろう。積分の範囲 $[a, b]$ を N 等分した台形で近似した面積 T は、

$$\begin{aligned} T &= h\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + h\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + h\frac{f(a+2h)+f(a+3h)}{2} + \cdots \\ &\qquad + h\frac{f(a+(N-1)h)+f(a+Nh)}{2} \\ &= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[f(a+jh)+f(a+(j+1)h)\right] \end{aligned} \tag{4}$$

となる。これが数値積分の台形公式である。なんのことはない、積分を台形の面積に置き換えているだけである。

2.2　台形公式の誤差について

台形公式による数値積分では、分割数 N を大きくするとその誤差は小さくなることは直感で分かる。それでは、分割数を増やしていくとどのように精度が良くなるのか考えてみよう。

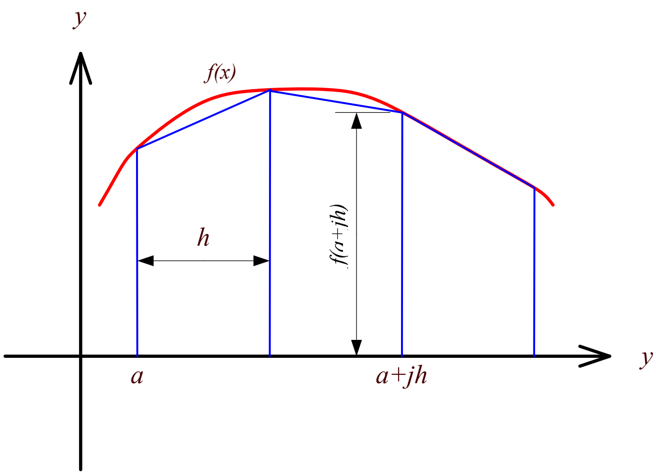

図 2: 積分と台形の面積の比較

まずは、式 4 のある一つの台形の面積と実際の積分の値を比較する。台形の面積 t は、台形公式より、

$$t = \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_1 + h)] \tag{5}$$

となる。これを実際の積分

$$s = \int_{x_1}^{x_1+h} f(x)dx \tag{6}$$

と比較することにする。これら 2 つの式の形がぜんぜん違うので比較できないと考えるかもしれないが、このような場合の常套手段がある。このようなときには、テーラー展開をすれば良いのである。式 (5) を x_1 の周りで、テイラー展開すると

$$\begin{aligned} t &= \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_1 + h)] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_1) + f'(x_1)h + \frac{f''(x_1)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}h^3 + \cdots\right] \\ &= f(x_1)h + \frac{f'(x_1)}{2}h^2 + \frac{f''(x_1)}{2\times 2!}h^3 + \frac{f'''(x_1)}{2\times 3!}h^4 + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

となる。これが台形の面積のテイラー展開である。一方、積分の式 (6) もテイラー展開する。これは、

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_1}^{x_1+h} f(x)dx \\ &= \int_0^h f(x_1+\xi)d\xi \\ &= \int_0^h \left[f(x_1) + f'(x_1)\xi + \frac{f''(x_1)}{2!}\xi^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}\xi^3 + \cdots \right] d\xi \\ &= \left[f(x_1)\xi + \frac{f'(x_1)}{2}\xi^2 + \frac{f''(x_1)}{3\times 2!}\xi^3 + \frac{f'''(x_1)}{4\times 3!}\xi^4 + \cdots \right]_0^h \\ &= f(x_1)h + \frac{f'(x_1)}{2}h^2 + \frac{f''(x_1)}{3\times 2!}h^3 + \frac{f'''(x_1)}{4\times 3!}h^4 + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

となる。この 2 つの式 (7) と (8) が台形での近似とまっとうに積分を行ったときのテイラー展開を表す。これらの式を比べると、刻み巾 h の 2 次まで一致している。異なるのは 3 次以降で、積分の誤差は、

$$\begin{aligned} |s-t| &= \frac{f''(x_1)}{2\times 2!}h^3 - \frac{f''(x_1)}{3\times 2!}h^3 + O(h^4) \\ &= \frac{f''(x_1)}{12}h^3 + O(h^4) \end{aligned} \tag{9}$$

と表せる。

これは、一つの台形近似の積分の誤差で、全てトータルの誤差は、

$$\begin{aligned} |S-T| &= N|s-t| \\ &= N\frac{f''(x_1)}{12}h^3 + O(h^4) \\ &= N\frac{f''(x_1)}{12}\left(\frac{b-a}{N}\right)^3 + O(h^4) \\ &= \frac{f''(x_1)}{12}\frac{(b-a)^3}{N^2} + O(h^4) \end{aligned} \tag{10}$$

となる。要するに積分の誤差は、分割数 N^2 に反比例する。分割数を 10 倍にすれば、積分の誤差は 1/100 になるわけである。

3 シンプソンの公式

台形公式の考え方は簡単であるが、精度はあまりよくない。そこで、よく似た考え方で精度が良いシンプソンの公式を説明する。台形公式は、分割点の値を一次関数 (直線) で近似を行い積分を行った。要するに折れ線近似である。ここで、1 次関数ではなく、高次の関数で近似を行えばより精度が上がることは、直感的に分かる。

2 次関数で近似を行うことを考える。2 次関数で近似するためには、3 点必要である。3 つの分点をそれぞれ、(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}) とする。そして、この 2 次関数を $P(x)$ とする。$P(x)$ はラグランジュ補間に他なら

ないので、

$$P(x) = \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} f(x_j) + \frac{(x - x_j)(x - x_{j+2})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j+2})} f(x_{j+1}) \\ + \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})} f(x_{j+2}) \quad (11)$$

となる。図 3 に示すとおりである。

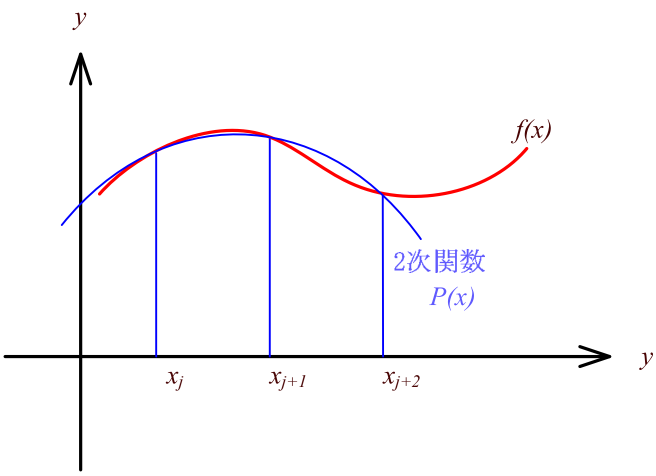

図 3: 元の関数を区間 $[x_j, x_{j+2}]$ を 2 次関数で近似する

これを、区間 $[x_j,\, x_{j+2}]$ で積分する。紙面の都合上、式 (11) の右辺を各項毎に積分を行う。まず、右辺第 1 項であるが、それは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{式 (11) 右辺第 1 項の積分} &= \int_{x_j}^{x_{j+2}} \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} f(x_j) dx \\ &= \int_0^{2h} \frac{(x_j + \xi - x_{j+1})(x_j + \xi - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} f(x_j) d\xi \\ &= \int_0^{2h} \frac{(\xi - h)(\xi - 2h)}{(-h)(-2h)} f(x_j) d\xi \\ &= \frac{f(x_j)}{2h^2} \int_0^{2h} \xi^2 - 3h\xi + 2h^2 d\xi \\ &= \frac{f(x_j)}{2h^2} \left[\frac{\xi^3}{3} - 3h\frac{\xi^2}{2} + 2h^2\xi \right]_0^{2h} \\ &= \frac{h}{3} f(x_j) \end{aligned} \quad (12)$$

同様に、第 2,3 項を計算すると

$$\text{式 (11) 右辺第 2 項の積分} = \frac{4h}{3} f(x_{j+1}) \quad (13)$$

$$\text{式 (11) 右辺第 3 項の積分} = \frac{h}{3} f(x_{j+2}) \quad (14)$$

となる。以上より、近似した 2 次関数 $P(x)$ の範囲 $[x_j,\, x_{j+2}]$ の積分は、

$$\int_{x_j}^{x_{j+2}} P(x)dx = \frac{h}{3}\left\{f(x_j) + 4f(x_{j+1}) + f(x_{j+2})\right\} \tag{15}$$

となる。

これは、ある区間 $[x_j,\, x_{j+2}]$ の積分で、その巾は $2h$ である。区間 $[a,\, b]$ にわたっての積分 S は、式 (15) を足し合わせればよい。ただし、$j = 0, 2, 4, 6$ と足し合わせる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right\} + \frac{h}{3}\left\{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right\} + \frac{h}{3}\left\{f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right\} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{h}{3}\left\{f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\right\} \\ &= \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + 2f(x_6) + \cdots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

これが、シンプソンの公式と呼ばれるもので、先ほどの台形公式よりも精度が良い。精度は、N^4 に反比例する。

この式から、分割数 N は偶数でなくてはならないことがわかる。これに注意して、プログラムを作成しよう。