後期中間試験問題(5E 計算機応用)

1　連立方程式の表現

問題 (1) 以下の連立方程式を行列とベクトルで表現せよ。(10 点)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3N}x_N &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + a_{M3}x_3 + \cdots + a_{MN}x_N &= b_M
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2　ガウスの消去法と後退代入

係数行列が $N \times N$ の連立方程式がある。この連立方程式の解をガウス消去法と後退代入で求める方法について、以下の問いに答えよ。

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N
\end{pmatrix}
\tag{2}
$$

問題 (1) ガウス消去法は、式 (2) の連立方程式をどのように変形するか、示せ。式 (2) で変形された要素には、ダッシュ記号を書くこと。(ヒント:係数行列を上三角行列に変形する) (10 点)

問題 (2) 上三角行列に変形されたことを利用して、解 x_N と x_{N-1}、x_{N-2} を表す式を示せ。(5 点)

問題 (3) 問題 (2) の式から類推して、一般的な解 x_i を表す式を示せ。(5 点)

3　ガウス・ジョルダン法

問題 (1) 以下の連立方程式をガウス・ジョルダン法で計算せよ。計算手順が分かるように説明も書くこと。(10 点)

$$
\begin{cases}
3x + 2y + z = 10 \\
x + y + z = 6 \\
x + 2y + 2z = 11
\end{cases}
\tag{3}
$$

問題 (2) 先の連立方程式の係数行列の逆行列をガウス・ジョルダン法で計算せよ。(8 点)

問題 (3) ガウス・ジョルダン法で連立方程式を計算するの C 言語の関数を以下に示す。引数の n は連立方程式の次元を示す。また、配列 a[][] には係数行列、b[] には同次項のベクトルが予め入る。解は、b[] に入る。(ア)〜(エ) に入る適当な文を、(A)〜(H) の中から選べ。(各 3 点)

```
/* ========= ガウスジョルダン法の関数 ================*/
void gauss_jordan(int n, double a[][100], double b[]){

   int ipv, i, j;
   double inv_pivot, temp;

   for(ipv=1 ; ipv <= n ; ipv++){

      /* ---- 対角成分=1(ピボット行の処理) ---- */
      inv_pivot = 1.0/a[ipv][ipv];
      for(j=1 ; j <= n ; j++){
         ( ア )
      }
         ( イ )

      /* ---- ピボット列=0(ピボット行以外の処理) ---- */
      for(i=1 ; i<=n ; i++){
         if(i != ipv){
            temp = a[i][ipv];
            for(j=1 ; j<=n ; j++){
               ( ウ )
            }
               ( エ )
         }
      }

   }
}
```

[適当な文の選択肢]

(A) `a[i][j] -= temp*a[ipv][j];`　　(B) `a[i][j] /= temp*a[ipv][j];`
(C) `a[ipv][j] *= inv_pivot;`　　(D) `a[ipv][j] += inv_pivot;`
(E) `b[i] -= temp*b[ipv];`　　(F) `b[i] /= temp*b[ipv];`
(G) `b[ipv] += inv_pivot;`　　(H) `b[ipv] *= inv_pivot;`

4　LU 分解

ここは、連立方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ を LU 分解で計算する原理を問う問題である。

問題 (1) LU 分解とは、係数行列をどのように変形することか?。係数行列の LU 分解を示せ。(10 点)

問題 (2) LU 分解すると連立方程式の解の数値計算が、簡単になる。LU 分解を利用すると、連立方程式はどのような形に変形できるか示せ。そうして、変形された連立方程式の計算が容易な理由を説明せよ。(5 点)

問題 (3) LU 分解を利用した連立方程式の計算は、全身代入と後退代入により計算できる。解を計算する式を示せ。(5 点)

5　ピボット選択

問題 (1) 連立方程式をコンピューターにより数値計算する場合、ピボット選択は重要である。ピボット選択をしない場合、どのような不都合があるか述べよ。(10 点)

問題 (2) 部分ピボット選択について、述べよ。(10 点)