後期中間試験解答と解説 (5E 計算機応用)

1 連立方程式の表現

(1) 解答 行列とベクトルを使って、連立方程式は以下のよう表現できる。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

それぞれの行列とベクトルは、

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

である。

2 ガウスの消去法と後退代入

(1) 解答 ガウスの消去法では、問題で与えられた連立方程式の係数行列を以下の式のように上三角行列に変形する。

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1N} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2N} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3N} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_N \end{pmatrix}$$

(2) 解答 上三角行列に変形から、

$$\begin{aligned} &a'_{NN}x_N = b'_N \\ &a'_{N-1N-1}x_{N-1} + a'_{N-1N}x_N = b'_{N-1} \\ &a'_{N-2N-2}x_{N-2} + a'_{N-2N-1}x_{N-1} + a'_{N-2N}x_N = b'_{N-2} \\ &\qquad\qquad\vdots \end{aligned}$$

となる。これから、直ちに、

$$
\begin{aligned}
x_N &= \frac{1}{a'_{NN}} b'_N \\
x_{N-1} &= \frac{1}{a'_{N-1N-1}} \left(b'_{N-1} - a'_{N-1N} x_N \right) \\
x_{N-2} &= \frac{1}{a'_{N-2N-2}} \left(b'_{N-2} - a'_{N-2N-1} x_{N-1} - a'_{N-2N} x_N \right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

を導くことができる。これは、$x_N, x_{N-1}, x_{N-2}, \cdot, x = 1$ のように、添え字の大きい x から計算していくのがミソである。そうすると右辺の値が、4 則演算で計算できる。

(3) 解答 先ほどの式から、解 x_i の表現は、

$$
x_i = \frac{1}{a'_{ii}} \left[b'_i - \sum_{j=i+1}^{N} a'_{ij} x_j \right]
$$

となる。

3 ガウス・ジョルダン法

(1) 解答 ガウス・ジョルダン法での連立方程式の解法は、以下のように行う。技巧を使わずに同じ手順の繰り返しである。この単純作業が、コンピューターには良いのだ。

問題の連立方程式は、

$$
\begin{cases}
3x + 2y + z = 10 \\
x + y + z = 6 \\
x + 2y + 2z = 11
\end{cases}
$$

である。まずは、1 行目の x の係数を 1 にするために、その行を x の係数の 3 で除算する。次に、2 と 3 行目の x の係数を 0 にする。2 行目は、(2 行-2 行の x の係数 $\times$1 行) の演算結果を 2 行目とすれば、そこの x の係数を 0 にできる。同様に 3 行目は、(3 行-3 行の x の係数 $\times$1 行) の演算で x の係数を 0 にできる。以下の通りである。

$$
\begin{cases}
3x + 2y + z = 10 \\
x + y + z = 6 \\
x + 2y + 2z = 11
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x + \frac{2}{3}y + z = \frac{10}{3} \\
x + y + z = 6 \\
x + 2y + 2z = 11
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{10}{3} \\
0 + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{8}{3} \\
0 + \frac{4}{3}y + \frac{5}{3}z = \frac{22}{3}
\end{cases}
$$

x の係数の処理が終わったので、続いて同じことを y と z について行う。次の y の係数であるが、2 行目の係数を 1、1 行目と 3 行目を 0 にする。2 行目の y の係数を 1 にするためには、x の時と同様に、その行をその係数で除算する。続いて、1 行目の y の係数を 0 にする。これも x の時と同様の (1

行-1 行の y の係数 $\times 2$ 行) の計算を行う。最後に、(3 行-3 行の y の係数 $\times 2$ 行) の計算を行い、3 行目の係数を 0 にする。

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}z=\dfrac{10}{3} \\ 0+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{2}{3}z=\dfrac{8}{3} \\ 0+\dfrac{4}{3}y+\dfrac{5}{3}z=\dfrac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}z=\dfrac{10}{3} \\ 0+y+2z=8 \\ 0+\dfrac{4}{3}y+\dfrac{5}{3}z=\dfrac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+0-z=-2 \\ 0+y+2z=8 \\ 0+0-z=-3 \end{cases}$$

x と y の係数の処理が完了したので、最後に z について行う。3 行目の z の係数を 0 にして、1 行目と 2 行目の z の係数を 0 にする。実際の演算は、x と y のときと同じである。

$$\begin{cases} x+0-z=-2 \\ 0+y+2z=8 \\ 0+0-z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+0-z=-2 \\ 0+y+2z=8 \\ 0+0+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+0+0=1 \\ 0+y+0=2 \\ 0+0+z=3 \end{cases}$$

最後の結果から、連立方程式の解は直ちに分かる。以下の通りである。

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

x と y、z の係数の処理の仕方が、全く同じであったことを理解して欲しい。この処理の仕方をプログラムに書けば、連立方程式がコンピューターで処理できる。

(2) 解答 逆行列を求める問題である。逆行列は、問題 (1) の連立方程式の解を求めるのと同じ手順で求めることができる。これについても、しつこく説明するので、連立方程式の解を求めるのと同じであることを理解して欲しい。

まず、係数と単位行列からなる以下のような行列を作成する。これ以外の表現も可能であるが、一般的にはこのようにする。

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

これの係数行列の部分を単位行列に変換すると、単位行列の部分が逆行列になる。単位行列に変換するのは、先ほどの連立方程式の解を計算したときと同じ手順でできる。先ほどは連立方程式の係数を単位行列に変換することでそれを解いたのだから、あたりまえである。

先ほどと同じように、係数行列を単位行列に変換する。まず 1 行 1 列を 1 にするために、1 行目を 1 行 1 列の要素で除算する。続いて、2 行 1 列と 3 行 1 列の要素を 0 にする。2 行 1 列の要素を 0 にするためには、(2 行-2 行 1 列 $\times 1$ 行) の演算結果を 2 行とすればよい。同じこと、(3 行-3 行 1 列 $\times 1$ 行) を 3 行に施す。これが第 1 列の操作で、以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 列目の処理が終わったので、続いて同じことを 2 列目と 3 列目について行う。2 行 2 列を 1、1 行 2 列と 3 行 2 列を 0 にする。2 行 2 列を 1 にするたｓめには、その行をその 2 行 2 列の値で除算する。続いて、1 行 2 列を 0 にするためには、(1 行-1 行 2 列の値 ×2 行) の計算を行い、それを新たな 1 行目とする。最後に 3 行目の係数を 0 にするために、(3 行-3 行 2 列の値 ×2 行) の計算を行い、それを新たな 3 行とする。これが第 2 列の操作で、以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

最後に同じことを、3 列目に施す。3 行 3 列を 1、1 行 3 列と 2 行 3 列を 0 にする。3 行 3 列を 1 にするたｓめには、その行をその 3 行 3 列の値で除算する。続いて、1 行 3 列を 0 にするためには、(1 行-1 行 3 列の値 ×3 行) の計算を行い、それを新たな 1 行目とする。最後に 2 行目の係数を 0 にするために、(2 行-2 行 3 列の値 ×3 行) の計算を行い、それを新たな 2 行とする。これが第 2 列の操作で、以下の通りである。これで、計算は完了である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

もともと単位行列の在った部分が、逆行列になっている。逆行列は、以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(3) 解答 （ア）C　（イ）H　（ウ）A　（エ）E

4 LU 分解

(1) 解答 係数行列を LU 分解すると以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{3}$$

(1) 解答 LU 分解できると、連立 1 次方程式は

$$\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{LU})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{Ux}) = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

となります。これをさらに書き換えると、

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{6}$$

となる。これらの連立方程式の解 $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}$ は、それぞれの係数が三角行列である。$\boldsymbol{y}$ の方程式は下三角行列なので、解は前進代入により容易に計算できる。同次項の $\boldsymbol{y}$ が求められたので、$\boldsymbol{x}$ は係数が上三角行列の方程式の解である。したがって、求める解 $\boldsymbol{x}$ は、後退代入により容易に計算できる。

(1) 解答 ガウスの消去法の後退代入と同じ要領である。解を求める式は、以下の通りにである。

まず、$\boldsymbol{y}$ を求める前進代入の式は、

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\alpha_{11}} b_1 \\ y_i &= \frac{1}{\alpha_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j \right) \qquad i = 2, 3, \cdots, N \end{aligned} \tag{7}$$

である。次に、この結果を利用して、後退代入により $\boldsymbol{x}$ を計算する。その式は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{1}{\beta_{NN}} y_N \\ x_i &= \frac{1}{\beta_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1+1}^{N} \beta_{ij} x_j \right) \qquad i = N-1, N-2, \cdots, 1 \end{aligned} \tag{8}$$

5 ピボット選択

(1) 解答 ガウス・ジョルダン法等で連立方程式を解く場合、対角要素で除算する操作が含まれる。といいます。もし、対角要素がゼロの場合、除算ができなくなり問題が生じる。また、対角要素が非常に小さい値の場合、丸め誤差が大きくなり問題となります。

(1) 解答 ピボットである対角成分が 0 あるいは小さい値であるときに、前述のように問題がある。これを避けるために、係数行列の行の入れ替えにより、ピボットを値をできるだけ大きなものにする方法が部分ピボット選択である。係数行列の行の入れ替えに対応する同次項の行も入れ替えます。そうすることにより、連立方程の解を変えることなく、ピボットを大きな値にできる。