卒業試験解答 (5E 計算機応用)

2004 年 2 月 18 日

学籍番号　　　　　氏名

1　補間

1.1　ラグランジュ補間

［問題 1］

平面座標上に $N+1$ 個の点がある場合、その全ての点を通る曲線は N 次関数で一意的に表せる。このように、$N+1$ 個のすべての点を通る N 次関数で補間する方法がラグランジュ補間である。

［問題 2］

$$\begin{aligned} y = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 \\ &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 \end{aligned}$$

［問題 3］

データ数が 4 個で、そのすべての点を通る 3 次関数になっていることは以下から分かる。

- 各項の分母は定数で、分子は 3 次関数である。したがって、この式は全体は 3 次関数である。
- x に x_0, x_1, x_2, x_3 を代入すると、y の値は y_0, y_1, y_1, y_3 になることが分かる。これは、データ点 (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) の全てを通過していることを示している。

［問題 4］

補間の点数が増えてくると、大きな振動が発生して、もはや補間とは言えなくなることが問題である。ラグランジュの補間には常にこの問題が付きまうので、データ点数が多い場合は使えない。

1.2　スプライン補間

［問題 1］

- 全てのデータ点を通る。各々の $S_j(x)$ に対して両端での値が決まるため、$2N$ 個の方程式ができる。
- 各々の区分補間式は、境界点の 1 次導関数は連続とする。これにより、$N-1$ 個の方程式ができる。
- 各々の区分補間式は、境界点の 2 次導関数は連続とする。これにより、$N-1$ 個の方程式ができる。

2　積分

2.1　台形公式

［問題 1］

台形公式とは、定積分

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

の近似値を数値計算で求める方法のひとつである。積分の計算は面積の計算であるから、図 1 のように台形の面積の和で近似が可能である。積分の範囲 $[a, b]$ を N 等分した台形で近似した面積 T は、

$$\begin{aligned} T &= h\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + h\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + h\frac{f(a+2h)+f(a+3h)}{2} + \cdots \\ &\qquad + h\frac{f(a+(N-1)h)+f(a+Nh)}{2} \\ &= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left[f(a+jh)+f(a+(j+1)h)\right] \end{aligned}$$

となる。ここで、刻み幅 $h = (a-b)/N$ である。これが数値積分の台形公式である。

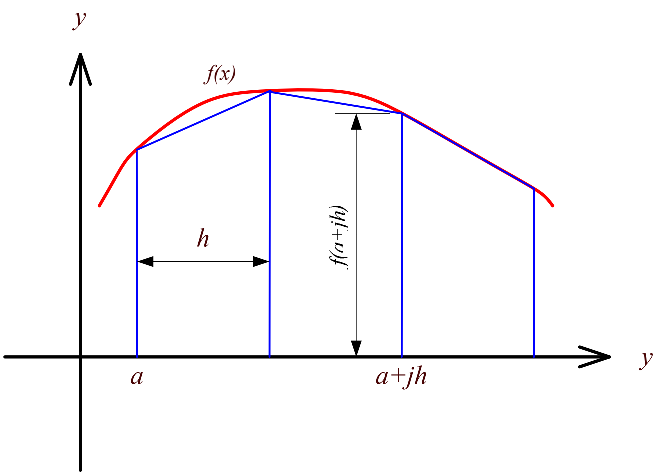

図 1: 積分と台形の面積の比較

2.2 シンプソンの積分公式

[問題 1]

台形公式は直線で補間を行い積分を行うが、シンプソンの公式はそれを 2 次関数で補間を行うものである。2 次関数で近似するためには 3 点必要で、$(x_j,\, x_{j+1},\, x_{j+2})$ とする。そして、この 2 次関数を $P(x)$ とする。$P(x)$ はラグランジュ補間に他ならないので、

$$P(x) = \frac{(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})}{(x_j-x_{j+1})(x_j-x_{j+2})}f(x_j) + \frac{(x-x_j)(x-x_{j+2})}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j+2})}f(x_{j+1}) + \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})}f(x_{j+2}) \quad (1)$$

となる。図 2 に示すとおりである。

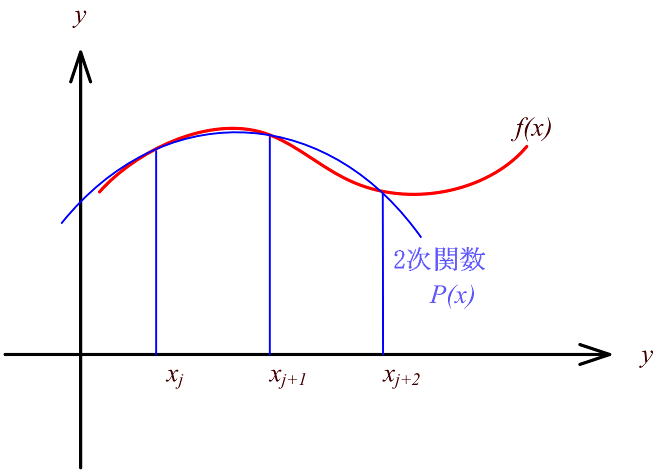

図 2: 元の関数を区間 $[x_j, x_{j+2}]$ を 2 次関数で近似する

これを、区間 $[x_j,\, x_{j+2}]$ で積分する。紙面の都合上、式 (1) の右辺を各項毎に積分を行う。まず、右辺第 1 項であるが、それは以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{式 (1) 右辺第 1 項の積分} &= \int_{x_j}^{x_{j+2}} \frac{(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})}{(x_j-x_{j+1})(x_j-x_{j+2})}f(x_j)dx \\
&= \int_0^{2h} \frac{(x_j+\xi-x_{j+1})(x_j+\xi-x_{j+2})}{(x_j-x_{j+1})(x_j-x_{j+2})}f(x_j)d\xi \\
&= \int_0^{2h} \frac{(\xi-h)(\xi-2h)}{(-h)(-2h)}f(x_j)d\xi \\
&= \frac{f(x_j)}{2h^2}\int_0^{2h} \xi^2 - 3h\xi + 2h^2 d\xi \\
&= \frac{f(x_j)}{2h^2}\left[\frac{\xi^3}{3} - 3h\frac{\xi^2}{2} + 2h^2\xi\right]_0^{2h} \\
&= \frac{h}{3}f(x_j)
\end{aligned} \quad (2)$$

同様に、第 2, は

$$
\begin{aligned}
\text{式 (1) 右辺第 2 項の積分} &= \int_{x_j}^{x_{j+2}} \frac{(x-x_j)(x-x_{j+2})}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j+2})} f(x_{j+1}) dx \\
&= \int_0^{2h} \frac{(x_j+\xi-x_j)(x_j+\xi-x_{j+2})}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j+2})} f(x_{j+1}) d\xi \\
&= \int_0^{2h} \frac{\xi(\xi-2h)}{h(-h)} f(x_{j+1}) d\xi \\
&= -\frac{f(x_{j+1})}{h^2} \int_0^{2h} \xi^2 - 2h\xi d\xi \\
&= -\frac{f(x_{j+1})}{h^2} \left[\frac{\xi^3}{3} - 2h\frac{\xi^2}{2} \right]_0^{2h} \\
&= \frac{4h}{3} f(x_{j+1})
\end{aligned} \tag{3}
$$

となる。同様に、第 3 項は

$$
\begin{aligned}
\text{式 (1) 右辺第 3 項の積分} &= \int_{x_j}^{x_{j+2}} \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})} f(x_{j+2}) dx \\
&= \int_0^{2h} \frac{(x_j+\xi-x_j)(x_j+\xi-x_{j+1})}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})} f(x_{j+2}) d\xi \\
&= \int_0^{2h} \frac{\xi(\xi-h)}{2h(h)} f(x_{j+2}) d\xi \\
&= \frac{f(x_{j+2})}{2h^2} \int_0^{2h} \xi^2 - h\xi d\xi \\
&= \frac{f(x_{j+2})}{2h^2} \left[\frac{\xi^3}{3} - h\frac{\xi^2}{2} \right]_0^{2h} \\
&= \frac{h}{3} f(x_{j+2})
\end{aligned} \tag{4}
$$

のようになる。以上より、近似した 2 次関数 $P(x)$ の範囲 $[x_j,\, x_{j+2}]$ の積分は、各項を足し合わせて、

$$
\int_{x_j}^{x_{j+2}} P(x) dx = \frac{h}{3} \left\{ f(x_j) + 4f(x_{j+1}) + f(x_{j+2}) \right\} \tag{5}
$$

となる。

これは、ある区間 $[x_j,\, x_{j+2}]$ の積分で、その巾は $2h$ である。区間 $[a,\, b]$ にわたっての積分 S は、式 (5) を足し合わせればよい。ただし、$j = 0, 2, 4, 6$ と足し合わせる。

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{h}{3}\left\{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right\} + \frac{h}{3}\left\{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right\} + \frac{h}{3}\left\{f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6)\right\} + \cdots \\
&\qquad \cdots + \frac{h}{3}\left\{f(x_{N-2})+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right\} \\
&= \frac{h}{3}\left\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+\cdots \right. \\
&\qquad \left. \cdots + 2f(x_{N-2})+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right\}
\end{aligned} \tag{6}
$$

これが、シンプソンの公式である。

3　偏微分方程式

3.1　ラプラス方程式

［問題 1］

　2 次元のラプラス方程式は、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

である。まずは、解 $\phi(x, y)$ をテイラー展開する。x および、y 方向に微小変位 $\pm h$ があった場合、

$$\phi(x+h, y) = \phi(x, y) + \frac{\partial \phi}{\partial x} h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} h^4 + \cdots \tag{2}$$

$$\phi(x-h, y) = \phi(x, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x} h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} h^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} h^4 - \cdots \tag{3}$$

となる。これらの式の辺々を足し合わせえると、

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x,y} = \frac{1}{h^2}\left[\phi(x+h, y) - 2\phi(x, y) + \phi(x-h, y)\right] - O(h^2) \tag{4}$$

が得られる。このことから、2 階の偏導関数の値は微小変位 h の場所の関数の値を用いて、h^2 の精度で近似計算ができることが分かる。すなわち、式 (4) の $O(h^2)$ を除いた右辺を計算すればよいのである。同じことを y 方向についても行うと

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right|_{x,y} = \frac{1}{h^2}\left[\phi(x, y+h) - 2\phi(x, y) + \phi(x, y-h)\right] - O(h^2) \tag{5}$$

が得られる。

　これらの式 (4) と (5) を元の 2 次元ラプラス方程式 (1) に代入すれば、

$$\phi(x+h, y) + \phi(x-h, y) + \phi(x, y+h) + \phi(x, y-h) - 4\phi(x, y) = 0 \tag{6}$$

となる。これが、2 次元ラプラス方程式の差分の式である。

3.2 波動方程式

［問題 1］

伝わる波の速度を 1 とした場合の波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

となる。

まずは、波動方程式を差分方程式に書き直すことからはじめる。まず、解 $u(x,t)$ をテイラー展開する。x 方向の微小変位を Δx、時間軸方向の微小変位を Δt とする。すると、

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x,t) &= u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4 + \cdots \\ u(x-\Delta x,t) &= u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4 - \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

となる。これらの式の辺々を足し合わせえると、

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x,y} = \frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right] - O(\Delta x^2) \tag{3}$$

が得られる。このことから、2 階の偏導関数の値は微小変位 Δx の場所の関数の値を用いて、$(\Delta x)^2$ の精度で近似計算ができることが分かる。すなわち、式 (3) の右辺の第 1 項を計算すればよいのである。同様なことを時間軸方向についても行うと

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x,t} = \frac{1}{\Delta t^2}\left[u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)\right] - O(\Delta t^2) \tag{4}$$

が得られる。

これらの式 (3) と (4) を元の波動方程式 (1) に代入すれば、

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)\right] = \frac{1}{\Delta t^2}\left[u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)\right] \tag{5}$$

となる。これが、1 次元波動方程式の差分の式である。