課題　常微分方程式

山本昌志*

2003 年 10 月 14 日

1　はじめに

今まで学習してきた常微分方程式の数値計算を用いて、電気に関する 2 つの問題を解きましょう。計算結果については、課題として提出してください。提出方法については、以下の通りです。

- 期限は、後期の中間テスト開始の 2 週間前とします。
- レポートとして提出してもらいますが、電子ファイルとします。
- プログラムとその結果のグラフを提出してもらいます。

2　問題

2.1　LCR 回路

もっと実用的な常微分方程式を解いてみよう。電気の諸問題の常微分方程式は 2 階の場合が多い。例えば、図 1 のような回路である。最初、コンデンサーにある電荷が蓄えられていたとする[1]。そうして、ある瞬間 (t=0) にスイッチ SW を ON にしたとする。この場合、回路に流れる電流は時間とともにどのように変化するか?。数値計算によりそれを求めてみよう。

まず、この回路に流れる電流の微分方程式をエネルギーという観点から導こう。コンデンサーとコイルに蓄えられたエネルギーの時間的な変化が抵抗で消費される電力になる。コンデンサーに蓄えられるエネルギーは $\frac{1}{2}CV^2$ で、コイルに蓄えられるエネルギーは $\frac{1}{2}LI^2$ である。一方、抵抗で消費される電力は、I^2R である。これらの関係を式で表すと、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2+\frac{1}{2}LI^2\right)+I^2R=0 \tag{1}$$

となる。

この式では、電流 I と電圧 V が時間の関数となっている。これでは見通しが悪いので、電圧の項をコンデンサーの式を用いて消去することを考える。コンデンサーに蓄えられる電荷を q とすると、$q=CV$ と

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

[1]コンデンサーに蓄えられる電荷と言う表現をするが、実際にはコンデンサーには電荷は蓄えられない。各々の電極に $+q$ と $-q$ の電荷が現れるが、双方を合計するとゼロになる。

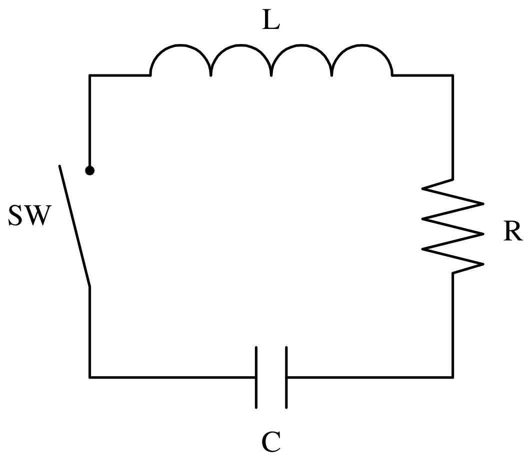

図 1: LCR 直列回路

言う関係がある。これから、$\frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt}$ が直ちに導かれる。ここで、電荷量の時間変化は電流となるので、$\frac{dq}{dt} = I$ となることに注意する。これらの関係式を用いて、式 (1) を書き直す。すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}LI^2\right) + I^2R = 0 \\
&CV\frac{dV}{dt} + LI\frac{dI}{dt} + I^2R = 0 \\
&C\frac{q}{C}\frac{I}{C} + LI\frac{dI}{dt} + I^2R = 0 \\
&\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR = 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

の関係式を導くことができる。最後の式の両辺の時間で微分すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR\right) = 0 \\
&\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} = 0 \\
&L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

となる。これで、電流 I のみ常微分方程式になる。これを解けばよいわけである。

2 階の常微分方程式は、1 階の連立常微分方程式に直すのがセオリーである。前期末試験の問題のように、

$$
\begin{cases}
I_0 = I \\
I_1 = \dfrac{dI}{dt}
\end{cases} \tag{4}
$$

と変数変換を行う。すると、式 (3) の最後の式は、

$$\begin{cases} \dfrac{dI_0}{dt} = I_1 \\ \dfrac{dI_1}{dt} = -\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{I_0}{C} + RI_1\right) \end{cases} \tag{5}$$

と書き直せる。

これを、4 次のルンゲ・クッタ法で計算する場合、

$$\begin{cases} \qquad k_{01} = hI_{1\_n} \\ \qquad k_{11} = h\dfrac{1}{L}\left(-\dfrac{1}{C}I_{0\_n} - RI_{1\_n}\right) \\ \qquad k_{02} = h\left(I_{1\_n} + \dfrac{k_{11}}{2}\right) \\ \qquad k_{12} = h\dfrac{1}{L}\left\{-\dfrac{1}{C}\left(I_{0\_n} + \dfrac{k_{01}}{2}\right) - R\left(I_{1\_n} + \dfrac{k_{11}}{2}\right)\right\} \\ \qquad k_{03} = h\left(I_{1\_n} + \dfrac{k_{12}}{2}\right) \\ \qquad k_{13} = h\dfrac{1}{L}\left\{-\dfrac{1}{C}\left(I_{0\_n} + \dfrac{k_{02}}{2}\right) - R\left(I_{1\_n} + \dfrac{k_{12}}{2}\right)\right\} \\ \qquad k_{04} = h\left(I_{1\_n} + k_{13}\right) \\ \qquad k_{14} = h\dfrac{1}{L}\left\{-\dfrac{1}{C}\left(I_{0\_n} + k_{03}\right) - R\left(I_{1\_n} + k_{13}\right)\right\} \\ I_{0\_n+1} = I_{0\_n} + \dfrac{1}{6}(k_{01} + 2k_{02} + 2k_{03} + k_{04}) \\ I_{1\_n+1} = I_{1\_n} + \dfrac{1}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}) \end{cases} \tag{6}$$

となる。これを、数値計算により時間の刻み幅 h 毎に計算視すればよい。

これを解くためには、L と C、R の値と初期条件が必要である。それぞれを以下のようにする。

- インダクタンス L とキャパシタンス C は、1 とする。
- スイッチ SW を ON にした瞬間 (t=0)、インダクタンス L があるので電流は流れない。I(0)=0 となる。また、$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = 1$ とする。$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = 1$ になるような電荷が蓄えられているわけである。

このような状況のもと、以下の場合について計算せよ。

1. $R = 1$ の場合について、電流の様子を計算せよ。
2. $R = 0, 1, 2, 3, 4$ の場合について、電流の様子を計算せよ。臨界減衰の時、どうなるか?
3. 抵抗が電流に比例する場合 $R = kI$、どうなるか計算せよ。$k = 1$ としてよい。

プログラムのヒントをあたえよう。I_{0_n} と I_{1_n} は、それぞれ `I0[n]` や `I1[n]` のような配列に格納する。そして、初期値は `I0[0]`=0 と `I1[0]=1` で表せる。ついでに時刻も配列 `time[n]` を使う。当然、`time[0]=0` で、`time[n+1]=time[n]+h` のように計算する。最終的な解は、`I0[n]` と `time[n]` の関係が重要になる。