実験実習 **3E**

3E 2003.4.21

共振回路の特性測定

秋田工業高等専門学校　電気工学科　山本昌志

1. LCR の直列共振回路

L と C、R については、先ほどのプリントで理解したと思う。そこで、配布した実験のプリントの回路の勉強をしよう。

L と C、R について、理解できなかった場合は、何回も読み直して、すべて自分で式が導けるように勉強をしてください。電気の超基本です。

1.1 共振周波数

回路の計算をする場合、まず、インピーダンスの計算からはじめるのが常套手段です。さて、電源から見たインピーダンスは、

$$Z = j\omega L - \frac{j}{\omega C} + R \tag{1}$$

ですね。だから、回路に流れる電流は、

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} \tag{2}$$

となります。実験のプリントと同じです。周波数が低いときは、流れる電流はコンデンサーが支配的です。周波数が高くなると、コイルが支配的になります。これは、複素数なので、電流と電圧の位相が異なっていることを示しています。

電流の振幅の大きさは、どうなりますか?。複素数の大きさは、複素共役を掛けて、1/2 乗すればよいのです。複素平面状のピタゴラスの定理そのものです。電流の振幅は、

$$\begin{aligned} |I| = \sqrt{II^*} &= \sqrt{\left[\frac{E}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}\right] \times \left[\frac{E}{R - j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}\right]} \\ &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \end{aligned} \tag{3}$$

となります。同じ回路、電圧であったも、流れる電流は電源の周波数に依存することが分かるでしょう。

そこで、最大電流が流れる周波数を求めよう。明らかに式(3)から、分母がもっとも小さくなるとき

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{4}$$

が最大電流が流れるときです。このときの周波数が共振角周波数と呼ばれ、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{5}$$

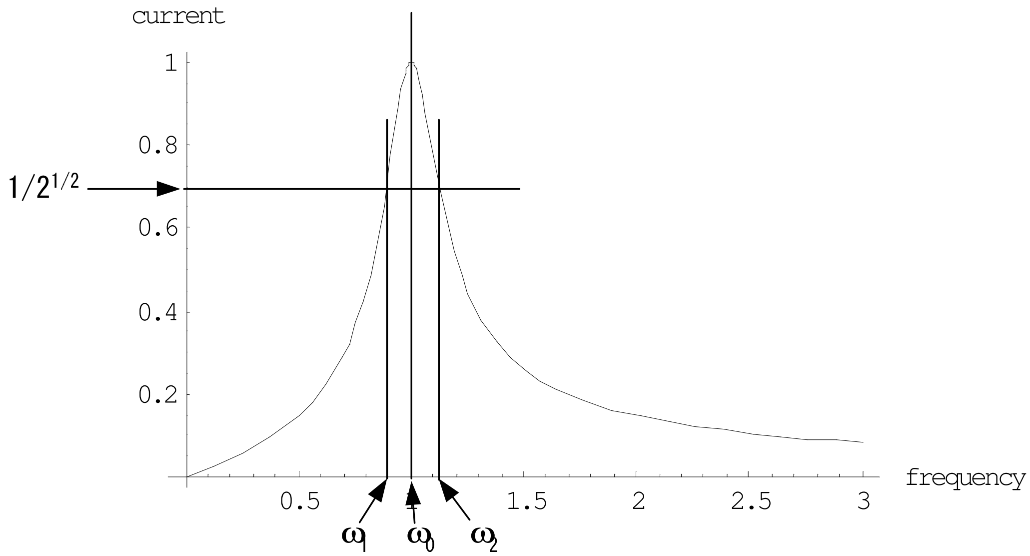
となるのは、明らかでしょう。共振状態では、インピーダンスは

$$Z = R \tag{6}$$

となり、純実数となります。共振状態のインピーダンスは、実数になります。電源からは、抵抗しか見えません。したがって、電流と電圧は、同位相になります。このように、インピーダンスが純実数になると、エネルギーは電源から回路に一方的に流れます。回路から電源にエネルギーが流れることはありません。

2.2 Q 値

電流のカーブ、すなわち共振を示すカーブは図 1 のようになります。また、共振時(ω_0)のピークの電流の$1/\sqrt{2}$になる周波数を、それぞれω_1, ω_2とします。それらを、図 1 に示します。



実験のプリントには、この周波数の幅を Q 値と定義しています。そして、これを共振の鋭さと言っています。

これは、物理的にどんな意味があるのでしょうか?。電流が$1/\sqrt{2}$になる周波数は、(2)式あるいは(3)式より、

$$\begin{aligned} \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} &= -R \\ \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} &= +R \end{aligned} \tag{4}$$

の場合です。この最初の式を計算します。その前に、

$$\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega_1 \tag{5}$$

としておきます。この方があとで計算が楽になります。

$$(\omega_0-\Delta\omega_1)L-\frac{1}{(\omega_0-\Delta\omega_1)C}=-R \tag{6}$$

この式を変形していきます。

$$\begin{aligned}
(\omega_0-\Delta\omega_1)-\frac{1}{(\omega_0-\Delta\omega_1)LC}&=-\frac{R}{L}\\
(\omega_0-\Delta\omega_1)-\frac{\omega_0^2}{(\omega_0-\Delta\omega_1)}&=-\frac{R}{L}\\
\frac{(\omega_0-\Delta\omega_1)}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{(\omega_0-\Delta\omega_1)}&=-\frac{R}{\omega_0 L}\\
1-\frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}-\left(1+\frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}\right)&=-\frac{R}{\omega_0 L}\\
\frac{\Delta\omega_1}{\omega_0}&=\frac{R}{2\omega_0 L}
\end{aligned} \tag{7}$$

となります。ここでは、$\Delta\omega/\omega_0 << 1$ という条件、2 次以降をゼロとしています。同様に(4)式の 2 番目は、

$$\frac{\Delta\omega_2}{\omega_0}=\frac{R}{2\omega_0 L} \tag{8}$$

となります。(7), (8)より、

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0}=\frac{\Delta\omega_2+\Delta\omega_2}{\omega_0}=\frac{R}{\omega_0 L} \tag{9}$$

です。したがって、Q 値は、

$$Q=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\frac{\omega_0 L}{R} \tag{10}$$

と表せます。これは、いったい、物理的にはどんな意味が隠されているのでしょうか?。そのために、両辺に I^2 を掛けます。

$$\begin{aligned}
Q&=\frac{\omega_0 I^2 L}{I^2 R}\\
&=\frac{\omega_0 \frac{1}{2}LI^2}{\frac{1}{2}I^2 R}\\
&=\frac{\omega_0 U}{P}\\
&=2\pi\frac{U}{PT}
\end{aligned} \tag{11}$$

となります。Q 値の物理的な意味は、回路で 1 周期で消費されるエネルギーPT と回路にたまっているエネルギーU の比の 2π倍ということになります。

2. Q 値の測定

これから以降は、実験のプリントに沿って、お話します。実験回路のように、発振器の周波数と電圧、抵抗とインダクタンスが一定として、コンデンサーの容量を変化させた場合を考えます。すると、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{I_0{}^2-|I|^2}{|I|^2}} &= \sqrt{\frac{\dfrac{E^2}{R^2}-\dfrac{E^2}{R^2+\left(\omega_0 L_0-\dfrac{1}{\omega_0 C}\right)^2}}{\dfrac{E^2}{R^2+\left(\omega_0 L_0-\dfrac{1}{\omega_0 C}\right)^2}}} \\
&= \sqrt{\frac{R^2+\left(\omega_0 L_0-\dfrac{1}{\omega_0 C}\right)^2}{R^2}-1} \\
&= \frac{\omega_0 L_0-\dfrac{1}{\omega_0 C}}{R} \\
&= \frac{\omega_0{}^2 L_0-\dfrac{1}{C}}{\omega_0 R} \\
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \text{ より} \\
\sqrt{\frac{I_0{}^2-|I|^2}{|I|^2}} &= \frac{\dfrac{1}{C_0}-\dfrac{1}{C}}{\omega_0 R} \\
&= \frac{1}{\omega_0 R}\frac{C-C_0}{CC_0} \\
&= \frac{1}{\omega_0 R C_0}\frac{\Delta C}{C}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となります。ここで、Q は(5)式と(10)式を使うと

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\omega_0 L_0}{R} \\
L_0 &= \frac{1}{C_0 \omega_0^2} \text{ より} \\
Q &= \frac{1}{\omega_0 R C_0}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となります。したがって、(12)式は、

$$\sqrt{\frac{{I_0}^2-|I|^2}{|I|^2}}=\frac{1}{\omega_0 RC_0}\frac{\Delta C}{C} \tag{12}$$
$$=Q\frac{\Delta C}{C}$$

となります。ここで、$|I|^2=|I_0|^2/2$ になるように、ΔC を選ぶと

$$Q=\frac{C}{\Delta C} \tag{13}$$

となります。ΔC が小さいとき、即ちΔC/C0 << 1 のとき(Q が大きいとき)、C≒C_0 となります。
したがって、求める Q は、

$$Q=\frac{C_0}{\Delta C} \tag{13}$$

から計算できます。左辺は、すべて測定可能な量です。

3. レポート

実験が実施できないので、計算を行い直列共振回路のイメージをつかんでもらう。示された条件を元に、レポートを提出してください。

・提出期日は、次回(4/28)の分もあわせて、5 月 6 日とします。
・ワープロ、手書きでもどちらでも OK とします。
・他人のを写すことは、厳禁とします。ただし、内容を理解するために、相談して書くのは、OK です。
・実験は行いませんが、レポートの形式は実験のレポートと同一とします。
・当然、実験方法も記入すること。さらに、実験のプリントに記述されている考察についても、記述すること。

レポートの条件です。

・回路は、直列共振回路です。実験のプリントで原理を説明している回路です。
・発振器の電圧は、ピーク E=1 V です。その周波数は、1591.5494kHz とします。これは、中波ラジオの周波数です。
・コイルのインダクタンスは、L=100 [μH]とします。

[Q1] 1591.5494kHz ($\omega=1\times10^7$)に共振するバリアブルコンデンサーの容量 C_0 は、いくらか?

[Q2] R=1, 20, 50 Ωのそれぞれについて、回路に流れる電流と、コンデンサーの容量の関係の表とグラフを作成しなさい。グラフは、共振点の電流の 1/2 程度になるところまで、作成すること。グラフの点は、それぞれのグラフに 10 点程度でよい。

[Q3] それぞれ、グラフより Q 値を求めなさい。

これが実験の代わりです。