論理回路の基本事項

山本昌志*

2003 年 10 月 20 日

1 はじめに

本テキストは、実験実習「基本論理回路 I」を行う上で必要な基礎知識を記述しています。

- 論理回路とは
- ブール代数
- 実験について

2 論理回路とは

現代社会では、コンピューターをはじめ数多くのデジタル回路が使われています。一般家電においてさえ、デジタル回路が使われていないものは無いと言えます。デジタル回路は、演算をする回路や記憶する回路から構成されています。これらの演算や記憶[1] の回路は、論理素子というものを組み合わせて作ることができます。一般に、論理素子を組み合わせて作られた回路を論理回路と言います。ここでの実験では、その論理素子の基本的な動作を学習します。

実際の論理素子は、図 1 のような外観の IC の形で販売されています。その中身の回路については、いろいろな種類がありその例を図 2 に示します。左端にある切り欠きが目印で、半時計回りでピン番号がふってあります。近頃の電子機器では、このような論理素子をそのまま使うことはまれですが、皆さんも見たことがあるでしょう。秋葉原あたりでは、これらの IC は 1 個あたり数十円で売られています。実際の工業製品では、それよりもずっと安く仕入れて製品に組み込んでいます。この IC を使って実験する方が良いと思いますが、ここでは実験ボードを使います。 最も基本的な論理素子は、AND と OR、NOT です。それらを表す MIL 論理記号を図 7〜8 に、その動作を表 2〜3 に示します。この 3 つの回路を組み合わせることにより、どんな演算も可能な回路ができます。おのぞみとあらば、どんな入出力関係の回路ができます。非常に驚きです。

さらに、記憶回路さえできてしまいます。これは、フリップ-フロップ回路言われるものです。ただし、ここでは範囲を超えますので、興味のある人は学習してください。

---

*国立秋田工業高等専門学校　電気工学科

[1] 論理回路を組み合わせた記憶素子は高価なので、一般にはコンデンサーに電荷を蓄える記憶素子が使われます。

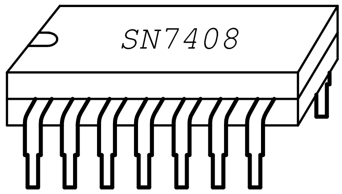

図 1: 論理回路用 IC

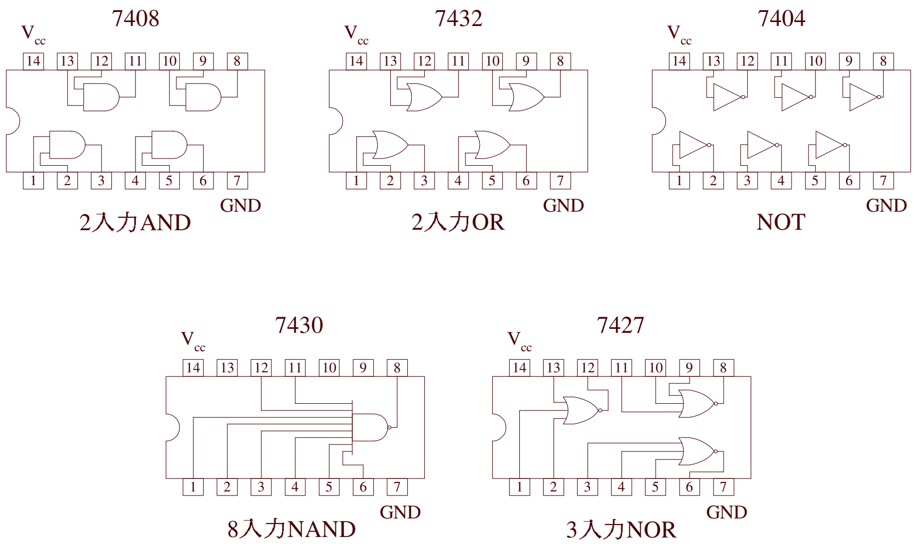

図 2: 論理回路用の IC の例。V_{CC} には電力+5[V] を供給し、GND は 0[V] のグランドに接続する。

どんな演算もできて、記憶すらできるのですから、コンピューターが可能ということです。この 3 個の素子、AND と OR と NOT でコンピューターが作れるのです。驚きでしょう。コンピューターは非常に複雑な機械ですが、元をただせば非常に単純な回路の組み合わせです。インテル社の最新の CPU である Pentium は約 7700 万個のトランジスタが使われています。論理素子は、数個のトランジスタで可能ですから、その CPU の中の論理素子の数は大変なものです。

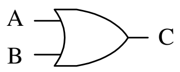

図 3: OR 素子

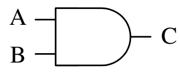

図 4: AND 素子

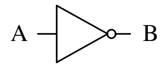

図 5: NOT 素子

表 1: OR 回路の動作

入力 [V]		出力 [V]
A	B	C
0	0	0
0	5	5
5	0	5
5	5	5

表 2: AND 回路の動作

入力 [V]		出力 [V]
A	B	C
0	0	0
0	5	0
5	0	0
5	5	5

表 3: NOT 回路の動作

入力 [V]	出力 [V]
A	B
0	5
5	0

論理回路の設計にはブール代数という数学の手法が使われます。つぎに、少しだけブール代数について勉強しましょう。

3　ブール代数

3.1　公理

まず、ブール代数の公理を示します。ブール代数は、

- 2 項演算子 $+, \cdot$ と単項演算子 $\bar{}$ が定義されています。それぞれ加法と乗法、および補元の演算子です。
- 使われる変数は、0 と 1 です。

の特徴をもっています。0 と 1 だけからなる代数系であり，これはコンピューター内部で行われている演算そのものです。演算子もコンピューター内部の回路と一致しています。それでは、ブール代数の公理を以下に示します。

公理 3.1 (ブール代数)

$$
\begin{array}{llll}
\text{交換法則} & A+B=B+A, & A\cdot B=B\cdot A & (1)\\
\text{分配法則} & A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C), & A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C) & (2)\\
\text{単位元} & A+0=A, & A\cdot 1=A & (3)\\
\text{補元} & A+\bar{A}=1, & A\cdot\bar{A}=0 & (4)
\end{array}
$$

これで、ブール代数が定義できました。それにしても、通常の数の演算と似ていますね。しかし、良く見ると少し異なります。

- 式 (2) の 2 つある分配法則のうちの一つが、数の計算の分配法則にはありません。
- 補元は逆元に似ていますが、ちょっと違います。

これらの違いによーく気をつけてください。さらに、演算について重要なことを付け加えておきます。それは、加法と乗法、補元の演算の結果は、必ず元の変数の集合 $\{0,1\}$ に含まれることです。このことをこれらの演算について閉じていると言います。閉じていることの確認は、3.2 節を見てください。

ブール代数には、この公理から直ちにに分かる重要な性質があります。この公理の加法の $+$ と乗法の $\cdot$、0 と 1 をそれぞれ入れ替えても、同じ公理になります。このことから次に示す双対の原理が成り立ちます。これは便利なもので、上手に使うと計算が楽になります。あるいは定理を憶えるのも半分ですみます。

定理 3.1 (双対の原理) ブール代数では、元の式の $+$ と $\cdot$、0 と 1 を交換してできる式を元の式の「双対」(dual) と呼びます。ブール代数において、ある定理が成り立つならば、その定理の双対もまた成り立ちます。

ブール代数においては加法と乗法は対等です。しかし、普通には、数の演算同様に乗法は加法に先立って計算されます。さらに、括弧を用いて、演算順序の変更も可能です。要するに、計算順序は普通の数の演算と同じと考えてよいです。そのため乗法の記号 $\cdot$ が省略されたり、加法よりも乗法を演算順序を優先することを暗黙の了解事項として書かれている場合があります。このようなことは可能です。しかし、双対の原理を考慮すると、加法と乗法の演算順序は対等とし、括弧で演算順序を決めて、さらに乗法の記号もちゃんと書いたほうが考えやすいと思います。

3.2 真理値表と MIL 記号

先に述べたように、ブール代数の変数の集合は $0,1$ です。そして、演算子は $+$ と $\cdot$、$\bar{}$ です。変数も演算子も少ないので、すべての組み合わせを表にすることは簡単です。それを表 4 から 6 に示します。このように、変数の全ての組み合わせを示して、その演算結果を示すものを真理値表と言います。これら基本演算子の動作をする回路記号 (MIL 記号) も図 6〜8 にしめします。

これらの表で示した演算は、全て公理から導くことができます。直接公理から導けないものは、後で示す定理を使えば簡単に導くことが出来ます。定理も公理から導いたので、この表の演算の根拠は公理にあります。

これら基本演算に加えて、よく使われる論理回路の素子を図 9〜12 に、その真理値表を表 7〜10 に示します。

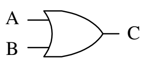

図 6: OR 素子

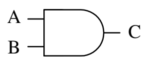

図 7: AND 素子

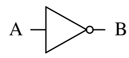

図 8: NOT 素子

表 4: OR の真理値表

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 5: AND の真理値表

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 6: NOT の真理値表

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

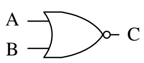

図 9: NOR 素子

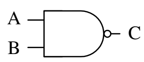

図 10: NAND 素子

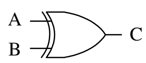

図 11: XOR 素子

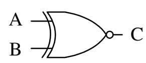

図 12: 一致素子

表 7: NOR の真理値表

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

表 8: NAND の真理値表

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 9: XOR の真理値表

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 10: 一致の真理値表

A	B	$A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.3 ブール代数の諸定理

公理から導かれる諸定理を以下に書き出します。これらは、全て公理を用いて証明可能であることを念頭に入れておいてください。皆さんは、公理は言うに及ばず、以下の定理も証明をしないで自由に使って計算しても良いです。

定理 3.2 (演算の諸定理)

結合則	$A + (B + C) = (A + B) + C,$	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	(5)
吸収則	$A + (A \cdot B) = A,$	$A \cdot (A + B) = A$	(6)
巾等律	$A + A = A,$	$A \cdot A = A$	(7)
	$A + 1 = 1,$	$A \cdot 0 = 0$	(8)
	$A + (\bar{A} + B) = 1,$	$A \cdot (\bar{A} \cdot B) = 0$	(9)
	$(A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B) = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B}),$	$(A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B) = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$	(10)
ド・モルガン	$\overline{(A + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B},$	$\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} + \bar{B}$	(11)

定理 3.3 (二重否定)

$$\bar{\bar{A}} = A \tag{12}$$

定理 3.4 $A + \bar{B} = 1$ かつ $A \cdot \bar{B} = 0$ ならば、$A = B$ である。

ここで示した全ての定理を公理を用いて証明することは、紙の無駄なので、2 つだけ例を示します。式 (8) と非常に有用なド・モルガンの法則である式 (11) を証明します。

【証明】 1 $A + 1 = 1$ を証明します。

$$\begin{aligned}
A + 1 &= (A + 1) \cdot 1 && [\text{公理:式 (3)}] \\
&= (A + 1) \cdot (A + \bar{A}) && [\text{公理:式 (4)}] \\
&= A + (1 \cdot \bar{A}) && [\text{公理:式 (2)}] \\
&= A + (\bar{A} \cdot 1) && [\text{公理:式 (1)}] \\
&= A + \bar{A} && [\text{公理:式 (3)}] \\
&= 1 && [\text{公理:式 (4)}]
\end{aligned}$$

これで証明できました。式 (8) のもう一方は、双対の原理により成り立つのは明らかです。

公理のみを使って、ド・モルガンの法則を証明するには、多くのページが必要です。そこでこの法則については、真理値表で証明します。公理を用いての証明に興味ある人は、図書館にあるフィスターの本 [?] でも読んでください。

【証明】 2 (ド・モルガンの法則) $\overline{(A + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ を証明します。左辺と右辺の真理値表が等しいことを示します。この式の左辺と右辺の真理値表は表 *11* のようになります。この式が成り立つことがわかったでしょう。この式が証明できたので、双対の原理により、$\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} + \bar{B}$ も成り立つといえます。

表 11: ド・モルガンの法則の真理値表。これより、$\overline{(A+B)} = \bar{A}\cdot\bar{B}$ が確認できる。

A	B	$A+B$	$\overline{(A+B)}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$(\bar{A}\cdot\bar{B})$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

4 実験について

ここでブール代数の応用として、テキストの実験 2 の (1) について、説明する。この実験の式は、

$$Y = A\cdot\bar{B} + B + A\cdot B \tag{13}$$

である。この式は、図 13 の回路をブール代数で表している。この回路をブール代数を用いて、簡単化する。その方法は、次のようにする。

$$\begin{aligned}
Y &= A\cdot\bar{B} + B + A\cdot C \\
&= B + A\cdot\bar{B} + A\cdot C && \text{交換法則より} \\
&= (B+A)\cdot(B+\bar{B}) + A\cdot C && \text{分配法則より} \\
&= (B+A)\cdot(1) + A\cdot C && \text{補元より} \\
&= B + A + A\cdot C && \text{単位元より} \\
&= B + A\cdot(1+C) && \text{分配法則より} \\
&= B + A\cdot(1) && \text{定理式 (8) より} \\
&= A + B
\end{aligned} \tag{14}$$

このように、ブール代数の式は簡単化できる。簡単化された最後の式は、図 14 の回路を表している。ただ単に、ブール代数の規則に従い式を変形することで、図 13 の複雑な回路から図 14 の簡単な回路に変形できたことになる。そして、これらの 2 つの回路は同じ働きをする。ブール代数という数学の規則を使うだけで、電子回路が簡単化できるのは驚きである。

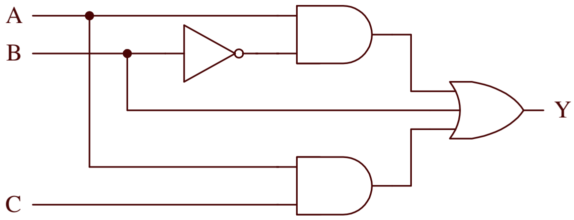

図 13: 実験のテキストの実験 2(1) の式の回路

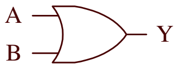

図 14: 実験のテキストの実験 2(1) の式を簡単にした回路