実験実習 **3E** 資料

3E 2003.4.21

コイルとコンデンサーと抵抗の基礎

秋田工業高等専門学校　電気工学科　山本昌志

1. 抵抗

1.1 抵抗のインピーダンス

抵抗のインピーダンスは、非常に簡単です。次式の通りです。抵抗は、この式で定義されると考えてよいでしょう。

$$Z = \frac{V}{I} = R \tag{1}$$

回路の計算では、この抵抗 R は周波数に依存しないで、いつも一定です。実際の抵抗は一定ではなく、周波数によって抵抗値は異なります。ただ、通常扱う範囲では、一定とみなします。

周波数に依存しないで、抵抗が一定と言うことは、インピーダンス Z が一定ということです。コイルやコンデンサーは、周波数が異なるとインピーダンスも異なります。

1.1 抵抗の消費電力

では、次にエネルギーに関する量です。抵抗が関係するものは、エネルギー損失だけです。抵抗に電流が流れると熱が発生します。これは、電気的なエネルギーが熱のエネルギーに変化したことを意味します。電気的なエネルギーの損失に等しい発熱量 P は、

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \tag{2}$$

です。これは、電源が P の電力を抵抗に送って、それがそこで熱に変化していると見ます。抵抗は、簡単ですね。

世の中にあるすべてのエネルギーは、最終的に熱に変わります。地球に太陽から降り注いできたエネルギーは、様々な形態を経て、熱に変わります。その熱は、夜の間に、電磁波のエネルギーとなって、宇宙へ捨てられるのです。

2. コンデンサー

2.1 コンデンサーのインピーダンス

次にコンデンサーのインピーダンスを考えましょう。少し、難しくなります。コンデンサーは、容量 C をもって表すことが出来ます。では、この容量 C とは、何でしょうか?。通常、容量は、

$$Q = CV \tag{3}$$

と表せますね。この電荷量 Q と電圧 V の関係から、容量 C が定義できます。これが、コンデンサーの定義と考えても良いでしょう。容量とは何かという問いは、この電荷量は何かという問いに置き換えられます。皆さん、考えてください。

我々はコンデンサーのインピーダンス Z を求めたいのですから、(3)から電流と電圧と容量 C の関係を求めなくてはなりません。(3)を時間で微分してみましょう。すると。

$$\frac{dQ}{dt} = I = C\frac{dV}{dt} \tag{4}$$

となりますね[1]。だいぶ、近づいてきました。我々は、交流[2]のインピーダンスを求めたいので、電圧を

$$V = V_0 \cos(\omega t) \tag{5}$$

としましょう。これを、(4)式に代入すると、

$$I = -\omega C V_0 \sin(\omega t) \tag{6}$$

となります。インピーダンスは、電流と電圧の比なので、

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{\omega V_0 \sin(\omega t)} = -\frac{1}{\omega \tan(\omega t)} \tag{7}$$

となりました。うーん、これは、まずい（；´д｀）。インピーダンスが時間の関数になっており、使いにくい。

そこで、交流の式(5)をやめて、これを複素数で考えます。(5)式の代わりに

$$V = V_0 e^{j\omega t} \tag{8}$$

を使うことにします。現実の電気回路は、実数の世界なのに、虚数を使うのは反則のように思えますが、我慢してください。あとで示すように、最終的な結果が現実と合っているので、良しとします。それよりも、(8)式のイメージが湧かない。複素関数論で習っただろうと言いたいところを我慢して、付録を見よ。

コイルの両端にかかる電圧は、(8)式で決まったので、コンデンサーに蓄えられるチャージ Q は、(3)式より求めることができます。

$$Q = CV = CV_0 e^{j\omega t} \tag{9}$$

次に、電流を考える。コンデンサーに流れる電流は、(9)式を時間微分すればよい。

$$I = \frac{dQ}{dt} = j\omega C V_0 e^{j\omega t} \qquad (9)$$

そして、インピーダンス Z は、電圧と電流の比なので、

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{j\omega C V_0 e^{j\omega t}} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \tag{10}$$

となります。この式は、めでたい。(7)式のようにインピーダンスが時間の関数になっていません。また、DC (ω=0)の時も、インピーダンスは無限大となり、合っています。後は、本当に正しいか、実験するのみです。実験の結果、この式は、正しかったことは分かっています。

また、複素関数で表した場合、現実の世界は、その実数部を取ると約束します。約束したくない人もいるかもしれませんが、そうすると正しいのだから仕方がありません。別に虚数部が現実の世界としても良いのですが、実数部と決めたほうが便利です。世の中、虚より実

---

[1] ここで、I と V が出てきました。それらには方向がありますので、注意が必要です。
[2] 当然、コンデンサーは直流は流れませんので、直流のインピーダンスは、無限大です。

を取ったほうが良いに決まっています。
それでは、実部を取ってみます。まず、電圧を示す(8)式の実部ですが、

$$V = \mathrm{Re}[V_0 e^{j\omega t}] = V_0 \cos(\omega t) \tag{11}$$

となります。(4)式と一致することが確かめられました。次に、ここに流れる電流です。(3)と(4)式から、求めることも出来ますが、面白くありません。せっかく求めたインピーダンスの(10)式を使いましょう。すると、

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{Re}\left[\frac{V}{Z}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{V_0 e^{j\omega t}}{-\frac{j}{\omega C}}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[j\omega C V_0 e^{j\omega t}\right] \\ &= \mathrm{Re}[j\omega C V_0 \{\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\}] \\ &= -\omega C V_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{12}$$

となります。これは、非常にめでたい式です＼（＾-＾）／。なんと、虚数みたいな反則すれすれの方法を使ったのに、結果は正しいのです。

2.2 コンデンサーの蓄積エネルギー

コンデンサーでは、電気的なエネルギーは、どうなっているのでしょうか?。電源からコンデンサーに送られる電力 P は

$$\begin{aligned} P &= IV \\ &= -\omega C V_0{}^2 \cos(\omega t)\sin(\omega t) \\ &= -\frac{1}{2} C V_0 \sin(2\omega t) \end{aligned} \tag{13}$$

となります。三角関数です w(°o°)w。1 周期積分するとゼロになります。また、送っている電力が負になることもあります。これは、いったい、どういうことでしょう。つぎのように考えます。

- P が正の時、即ち 1 周期の半分の時間、電源がコンデンサーに向けて電力を送ります。
- P が負の時、即ち 1 周期の残り半分の時間、電源がコンデンサーから電力をもらっているのです。
- コンデンサーは、P が正の時間、内部にエネルギーを蓄えます。そして、P が負の時間、そのエネルギーを放出します。

ここまでの議論で、コンデンサーはエネルギーを消費しない。抵抗みたいに熱くならないことが分かったと思います。また、エネルギーを蓄えることも出来ることも、なんとなく分かったと思います。
それでは、コンデンサーの中にエネルギーはどれだけ蓄えられているのでしょうか?。そ

れを計算するために、図 2 のような回路を考えます。

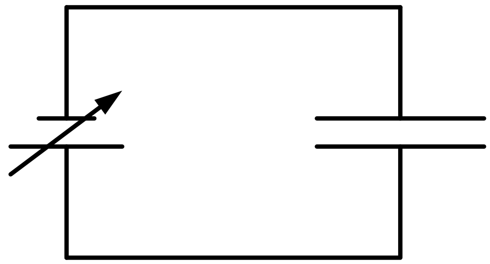

図 2 コンデンサーの蓄積エネルギーを考える回路

この回路、初期状態では、電圧はゼロ、コンデンサーのチャージもゼロ、もちろん蓄積エネルギーもゼロとします。しばらくして、電源の電圧を徐々に図 3 のように動かします。電源電圧、即ちコンデンサーの電圧は、最初ゼロで、時刻 t1 の時に V1 になります。

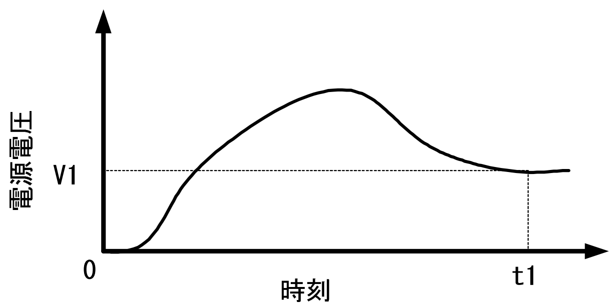

図 3 電源の電圧

すると、コンデンサーの電荷量は(3)式から、流れる電流は(4)式から求められます。図 3 のような t=t1 の状態で、コンデンサーに溜まっているエネルギーを計算しよう。コンデンサーに溜まっているエネルギーU は、電源が送った電力の総和(時間積分)であるため、

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^{t1} IV dt \\
&= \int_0^{t1} C\frac{dV}{dt} V dt \\
&= \left[\frac{1}{2}CV^2\right]_0^{t1} \\
&= \frac{1}{2}CV_1^2
\end{aligned}
\tag{14}
$$

と計算できます。これは、驚くべきことで、コンデンサー内に蓄えられているエネルギーは、途中の道筋に関係なく、印加されている電圧で決まります[3]。電圧と蓄積エネルギーがわか

[3] 正確を期すならば、コンデンサー内のエネルギーの変化は、最初と最後の状態で決まる。

れば、容量 C がわかります。そこで、この式をコンデンサーの容量 C の定義と考えることも出来ます。エネルギーと電圧から容量が決まるので、分かりやすいと思います。私は、コンデンサーを考える場合、たいていこの式から出発します。

この蓄積エネルギーは、どのようにして蓄えられるのでしょうか?。電磁気学で学習したと思いますが、このエネルギーは電場として蓄えられるのです。詳細は、電磁気学を勉強してください。

これで、コンデンサーのインピーダンスと蓄積エネルギーを決める式が分かったので、この章は終わり。

3. コイル

コンデンサーと同じことを、コイルについて計算します。ほとんど、議論は同じなので、だいぶ説明を省くので、各人、よく考えるように。

コイルとコンデンサー、形状といい、働きといいまったく異なるのに、ほとんど同じ議論が成り立つのは面白いことです。

コイルは、

$$V = L\frac{dI}{dt} \tag{15}$$

です。この場合も、電流と電圧の方向に注意が必要です。これについては、各人、よく考えなさい。

コンデンサーを考えた時の電源は、交流の電圧源でしたが、コイルでは電流源を考えます。なぜかって、(4)式と(15)式を比べると、V と I が入れ代わっているだけです。だから、同じ議論を進めることができます。

すると、インピーダンス Z は、

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{j\omega L I_0 e^{j\omega t}}{I_0 e^{j\omega t}} = j\omega L \tag{16}$$

となります。コンデンサーさえ理解すれば、簡単簡単ｏ（＾－＾ｏ）。

コンデンサー同様に、コイルではエネルギーは消費されません。蓄積エネルギーも同様の計算が出来ます。結果だけ、書くと

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{t1} IV dt \\ &= \int_0^{t1} IL\frac{dI}{dt} dt \\ &= \left[\frac{1}{2}LI^2\right]_0^{t1} \\ &= \frac{1}{2}LI_1^{\ 2} \end{aligned} \tag{14}$$

となります。L[H]のコイルに、電流が I_1[A]流れているときの蓄積エネルギー U[J]の式です。

このエネルギーは、コイルの磁場のエネルギーという形で蓄えられます。

付録 A 複素関数の基礎(L, C, R 回路を学ぶために)

L と C、R でできた回路を計算するときに必要な複素関数の知識を羅列します。証明は、各自、数学の教科書を見よ。また、ここでの表現は、数学の専門家から見ると、乱暴かもしれませんが、複素数の雰囲気を味わう分には問題が無いでしょう。

A.1 超基本

言うまでもないが、

$$j^2 = -1 \tag{A.1}$$

です。

A.2 級数展開

指数関数と三角関数の級数展開は、以下のおとおり。

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx + \frac{1}{2!}(jx)^2 + \frac{1}{3!}(jx)^3 + \frac{1}{4!}(jx)^4 + \frac{1}{5!}(jx)^5 + \frac{1}{6!}(jx)^6 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots \\ &\quad + j\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \cdots\right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots \tag{A.3}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots \tag{A.4}$$

この級数展開の式は、実関数で習ってきたことすべて満足することを確認しなさい。

- ゼロ点での値
- 微分
- 三角関数の展開式(A.3)と(A.4)が正しいことを、左辺を計算することにより確かめよ。

A.2 オイラーの公式

(A.2)〜(A.4)から、導かれる有名な、オイラーの公式は、以下の通り。

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x) \tag{A.5}$$

三角関数と指数関数が、こんな簡単な式で結ばれている。また、 $x = \pi$を代入すると、

$$e^{j\pi} = -1 \tag{A.6}$$

驚くべき美しい式ができあがる。

また、以下の式も導くことができる。これもよく使われる。

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \tag{A.6}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \tag{A.7}$$

A.3 倍角の公式、半角の公式、加法定理

3 角関数の諸々の公式は、(A.2)のオイラーの公式からすべて導くことができます。一例として、加法定理を示します。

$$e^{j(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta) \tag{A.8}$$

となります。一方、

$$\begin{aligned} e^{j(\alpha+\beta)} &= e^{j\alpha} e^{j\beta} \\ &= [\cos(\alpha) + j\sin(\alpha)] \times [\cos(\beta) + j\sin(\beta)] \\ &= [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)] \\ &\quad + j[\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)] \end{aligned} \tag{A.9}$$

です。(A.8)と(A.9)より、

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{A.10}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \tag{A.11}$$

となります。これが、三角関数の加法定理です。

A.4 複素平面

実数は数直線で表すことができますが、複素数は複素平面で表現します。実数をあらわす数直線は 1 次元、複素数は 2 次元、それでは 3 次元であらわす数字、あるいは 3, 4, 5・・・であらわす数字はあるのでしょうか?。実はありますが、3 次元以上は滅多に使われることはありません。私は、見たことがありません。3 次元以上になると、ベクトルや行列表示の方が使いやすいからだと思います。また、代数方程式の解が、複素数で表せるからかもしれません。私は、良く知りません。

話は変わって、複素平面での表示は、2 次元のベクトルの表示と似ていると思いませんか?。ほとんどの取り扱いは、2 次元のベクトルと同じです。どちらも、順序づけられた 2 つの実数から構成されます。加法は、まったく同じです。乗法が少し、異なります。あとは、数学の教科書を見てください。

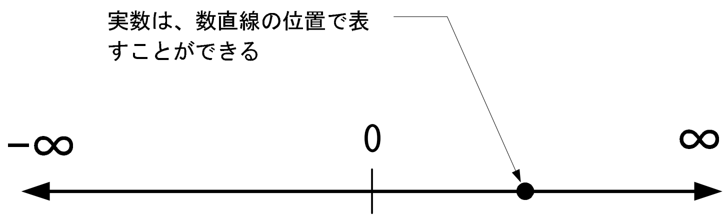

図 A.1 数直線による実数の表現

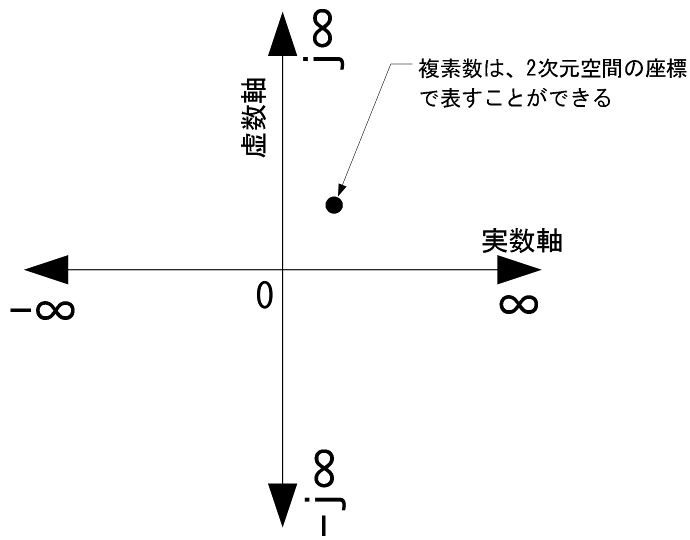

図 A.2 複素平面による複素数の表現

複素数の大きさは、実数の場合と同様に、原点からの距離であらわします。したがって、複素数 $z = x + jy$ の大きさ $|z|$は、ピタゴラスの定理から

$$\begin{aligned} |z|^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (x + jy)(x - jy) \\ &= zz^* \end{aligned} \tag{A.12}$$

となります。z^*は、複素共役です。

また、複素平面で表現したオイラーの公式は、図 A.3 のようになります。複素関数で考える指数関数は、変数が実数(図 A.3 のθ)のとき、複素平面状の単位円を描きます。指数関数が複素平面状の単位円を描くから、三角関数とオイラーの関係式で結ばれるわけです。

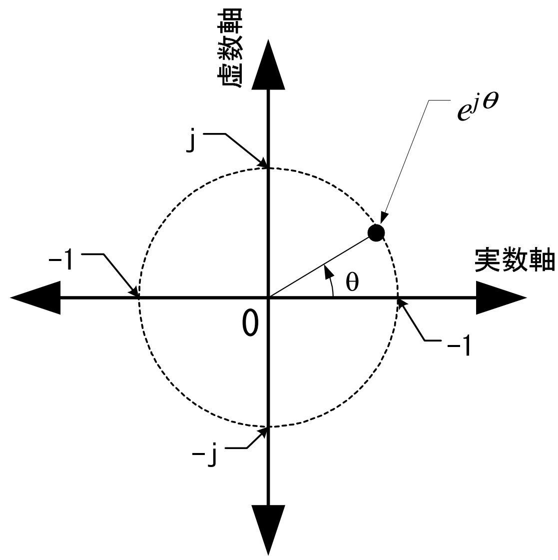

図 A.3 複素平面で表したオイラーの関係式

A.5 複素数の乗法

複素数の加法はいたって簡単で、実数項同士、虚数項同士を足し合わせるだけです。ベクトルもいっしょですね。では、複素数同士の乗法も、これも簡単で、皆さんは得意でしょう。(A.1)式に気を付けるだけですね。では、複素数の乗法について、複素平面でのイメージはどうでしょうか?。これについては、わからない人も居ると思いますので、簡単に説明します。ここで、考えることは、-1 倍することと、*j* 倍することだけです。あとは、推測がつくでしょう。

では、-1 倍については、実数と同じです。実数では、原点を中心にして対称な位置に移ることが-1 倍です。複素数でも、全く一緒です。

次は、*j* 倍です。これは、少し難しいかもしれませんが、理解してください。*J* を指数関数で表すと

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j \tag{A.13}$$

となります。図 A.3 やオイラーの公式からわかりますよね。このことから、*j* 倍することは、exp(j π/2)を掛けることと同じであるといえます。

次に任意の任意の複素数 z は、

$$z = re^{j\theta} \tag{A.14}$$

と表現できることも、図 A.3 から、分かると思います。ただし、r やθは実数です。

準備は、式(A.13)と(A.14)で終わりです。これらを使って、任意の複素数 z を *j* 倍する方法を考えましょう。これらの式から、

$$\begin{aligned} jz &= e^{j\frac{\pi}{2}} \times re^{j\theta} \\ &= re^{j\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned} \tag{A.15}$$

となります。そう、j 倍するということは、複素平面上で、π/2 rad (90 度)反時計回りに回すことです。j を 2 回掛ける、すなわち j^2 はπ rad 回転させることになります。j^2=-1 なので、乗法の最初に述べたことと矛盾ありません。簡単でしょう。図 A.4 に、その様子を示します。