電子計算機 **3E**

3E　2003.4.28

本節の授業のテーマ

本日の事業のテーマは、以下のとおりです。

(1) 数の表現
- いろいろな数字の表記法
- 現代の数字の表記法の意味

(2) 基数の変換
- 変換(2 進数→10 進数)
- 変換(2 進数→16 進数)
- 変換(10 進数→2 進数)

本日の授業のゴールは、以下のとおり。
- 数の表現の意味が分かること。
- 基数の変換の理論が分かること。

0. 前回の復習

コンピューターのイメージがつかめたと思います。前回までの授業をまとめると、つぎのようになります。

・一般的なパソコンは、

・中央演算装置(CPU, MPU)	PENTIUM とか
・主記憶装置 (main memory)	RAM
・外部記憶装置	ハードディスクなど
・通信装置	LAN カードなど
・入力装置	キーボードなど
・出力装置	ディスプレイなど

から構成されます。

・情報処理試験用の仮想のハードウェア− COMMET II 上で動くアセンブラ言語を CASL II という。

・アセンブラ言語は CPU 毎に、記述が異なる。したがって、実際世の中にある CPU のアセンブラで試験をするわけにはいかない。共通の土台で試験が出来ない。

・そこで、機能が簡単な COMMET II と CASL II が考えられた。

・COMMET II の構成要素は、

・中央演算装置	
・主記憶装置 (main memory)	
・入力装置	通常はキーボード
・出力装置	通常はディスプレイ

です[1]。

・アセンブラ言語は、CPU の動作を記述するものです。

・CPU の仕事は、主記憶装置からデータと命令を読み込み、その命令に応じて、データを、主記憶装置に戻している。

・一般的な CPU は、次の機器から構成されます。

・演算装置
・レジスタ
・制御装置
・クロック

・このうち、プログラマにとって大事なのは、演算装置とレジスタです。アセンブラのプログラムでは、これらの動作を記述します。

[1] 正確に言うと違いますが、ここでの学習ではこのように考えれば、ほぼ間違いないです。

1. 数の表現

CASL IIを学ぶために必要な数の表現について、学びます。教科書のp.2〜p.12が範囲です。

1.1 いろいろな数字の表記法

通常使われている10進数では、0〜9までの10個の数字を使って、数を表現します。9の次は10で桁が上がります。2進数、8進数、10進数、16進数の数の表現を以下に示します。合わせて、桁上がりという考えの無い楔形文字やローマ数字も併記します。桁上がりという考えが無い表記の場合、桁が上がるたびに、新しい記号が必要です。大きな数字を表す場合、非常に不便です。ゼロが発見されたから、現代の便利な表現が可能になったのです。

数の表現	基数	底
2進数	2	0, 1
8進数	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10進数	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16進数	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

数	2進数	8進数	10進数	16進数	楔形文字	ローマ数字
	0	0	0	0		
●	1	1	1	1	▼	I
●●	10	2	2	2	▼▼	II
●●●	11	3	3	3	▼▼▼	III
●●●●	100	4	4	4	▼▼▼▼	IV
●●●●●	101	5	5	5	▼▼▼▼▼	V
●●●●●●	110	6	6	6	▼▼▼▼▼▼	VI
●●●●●●●	111	7	7	7	▼▼▼▼▼▼▼	VII
●●●●●●●●	1000	10	8	8	▼▼▼▼▼▼▼▼	VIII
●●●●●●●●●	1001	11	9	9	▼▼▼▼▼▼▼▼▼	IX
●●●●●●●●●●	1010	12	10	A	◀	X
●●●●●●●●●●●	1011	13	11	B	◀▼	XI
●●●●●●●●●●●●	1100	14	12	C	◀▼▼	XII
●●●●●●●●●●●●●	1101	15	13	D	◀▼▼▼	XIII
●●●●●●●●●●●●●●	1110	16	14	E	◀▼▼▼▼	XIV
●●●●●●●●●●●●●●●	1111	17	15	F	◀▼▼▼▼▼	XV
●●●●●●●●●●●●●●●●	10000	20	16	10	◀▼▼▼▼▼▼	XVI
●●●●●●●●●●●●●●●●●	10001	21	17	11	◀▼▼▼▼▼▼▼	XVII
●●●●●●●●●●●●●●●●●●	10010	22	18	12	◀▼▼▼▼▼▼▼▼	XVIII
●●●●●●●●●●●●●●●●●●●	10011	23	19	13	◀▼▼▼▼▼▼▼▼▼	XIX

1.2 現代の数字の表記法の意味

10 進数と 2 進数や 16 進数との変換を考える前に、数の表記方法について、勉強しましょう。すると、それらの変換が理解できます。

例えば、今年は 2003 年です。10 進数の 2003 の表記はどのような意味があるのでしょうか?。これは、次のように解釈します。えらそうですが、こう解釈すると、他の基数の数字の意味がわかりやすくなります。

$$(2003)_{10} = (2\times 10^3 + 0\times 10^2 + 0\times 10^1 + 3\times 10^0) \tag{1}$$

括弧の下の 10 は、10 進法の意味です。非常に簡単です。これさえ、分かれば基数の変換なんか簡単です。

2. 基数の変換

2.1 変換(2 進数→10 進数)

これは、簡単です。(1)式を理解していれば、分かります。2 進数であろうが、10 進数であろうが、表記法は同じです。すなわち、

$$\begin{aligned}(10011)_2 &= (1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0)\\ &= (16+0+0+2+1)_{10}\\ &= (19)_{10}\end{aligned} \tag{2}$$

となります。ただ、基数が違うだけです。ところで、この演算を施すと、なぜ、10 進数に変換されるのでしょうか?。3 進法や 5 進数ではなく、われわれが普通に使う 10 進数に変換された理由は、なぜでしょうか?。10 進数は特別なのでしょうか?。いいえ、10 進数は特別ではありません。みなさん、考えてください。

2.2 変換(2 進数→16 進数)

これも、非常に簡単です。教科書の例で説明しましょう。

$$\begin{aligned}(0110001100101111)_2 &= (0\times 2^{15} + 1\times 2^{14} + 1\times 2^{13} + 0\times 2^{12}\\ &\quad + 0\times 2^{11} + 0\times 2^{10} + 1\times 2^9 + 1\times 2^8\\ &\quad + 0\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4\\ &\quad + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0)\\ &= (0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0)\times 2^{12}\\ &\quad + (0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0)\times 2^8\\ &\quad + (0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0)\times 2^4\\ &\quad + (1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0)\times 2^0\\ &= (6\times 16^3 + 3\times 16^2 + 2\times 16^1 + F\times 16^0)\\ &= (632F)_{16}\end{aligned} \tag{3}$$

この例から分かるように、$16=2^4$ なので、2 新数の表記を 4 桁づつ区切り、それぞれを 16 進数で表せばよいのです。

2.3 変換(10 進数→2 進数)

われわれは、10 進数の演算になれているため、N 進数から 10 進数への変換は、簡単に行えます。しかし、逆は、ちょっと難しくなります。

計算手法は簡単ですが、その内容を理解することが大事です。計算手法を忘れても、内容が理解できていれば、手法など、自分で作ることができます。では、簡単な例で説明します。10 進数の$(19)_{10}$を 2 進数に変換する方法です。具体的には、19 を

$$(19)_{10} = (a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + a_2 \times 2^2 + a_3 \times 2^3 + a_4 \times 2^4 + \cdots) \tag{4}$$

と表現したいのです。それぞれ、a_nを求めなくてはなりません。そこで、次の変形を考えましょう。

$$(9 \times 2 + 1)_{10} = (a_1 \times 2^0 + a_2 \times 2^1 + a_3 \times 2^2 + a_4 \times 2^3 + \cdots) \times 2 + a_0 \tag{5}$$

となります。これをよくにらむと、$a_0 = 1$ ということが分かります。すなわち、a_0は 19 を 2 で割ったあまりです。残りの部分は、

$$(9)_{10} = (a_1 \times 2^0 + a_2 \times 2^1 + a_3 \times 2^2 + a_4 \times 2^3 + \cdots) \tag{6}$$

となることも分かるでしょう。同じことをすると、

$$(4 \times 2 + 1)_{10} = (a_2 \times 2^0 + a_3 \times 2^1 + a_4 \times 2^2 + a_5 \times 2^3 + \cdots) \times 2 + a_1 \tag{7}$$

となります。したがって、$a_1 = 1$ になります。しつこいようですが、さらに同様に進めると、

$$\begin{aligned}
(2 \times 2 + 0)_{10} &= (a_3 \times 2^0 + a_4 \times 2^1 + a_5 \times 2^2 + a_6 \times 2^3 + \cdots) \times 2 + a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0 \\
(1 \times 2 + 0)_{10} &= (a_4 \times 2^0 + a_5 \times 2^1 + a_6 \times 2^2 + a_7 \times 2^3 + \cdots) \times 2 + a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 0 \\
(0 \times 2 + 1)_{10} &= (a_5 \times 2^0 + a_6 \times 2^1 + a_7 \times 2^2 + a_8 \times 2^3 + \cdots) \times 2 + a_4 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1
\end{aligned} \tag{8}$$

となります。最後の式から、$a_n = 0 \quad (n \geq 5)$が分かります。以上をまとめると

$$\begin{aligned}
(19)_{10} &= (a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0) \\
&= (1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \\
&= (10011)_2
\end{aligned} \tag{9}$$

です。要するに、2 で割ったあまりを書いていけばよいのです。

よく使われるのは、以下のようにして計算します。

2	) 19	—	1
2	) 9	—	1
2	) 4	—	0
2	) 2	—	0
	1		

2	) 2003	—	1
2	) 1001	—	1
2	) 500	—	0
2	) 250	—	0
2	) 125	—	1
2	) 62	—	0
2	) 31	—	1
2	) 15	—	1
2	) 7	—	1
2	) 3	—	1
	1		

それぞれは、

$$(19)_{10} = (10011)_2 \tag{10}$$

$$(2003)_{10} = (11111010011)_2 \tag{11}$$

に対応します。よく、内容を理解して、変換の練習をしてください。

2.4 変換(10 進数→16 進数)

10 進数を 2 進数に変換する方法が理解できたら、16 進数に変換する方法は簡単です。同じことをすれば良いのです。たとえば、教科書の例を実施すると、次のようになります。

16	) 25391	—	15	—	F
16	) 1586	—	2	—	2
16	) 99	—	3	—	3
	6	———			6

教科書の方法より、簡単だと思います。手計算を実施する場合、通常、この方法を用います。ただし、実際のエンジニアーは、電卓の変換機能を使います。